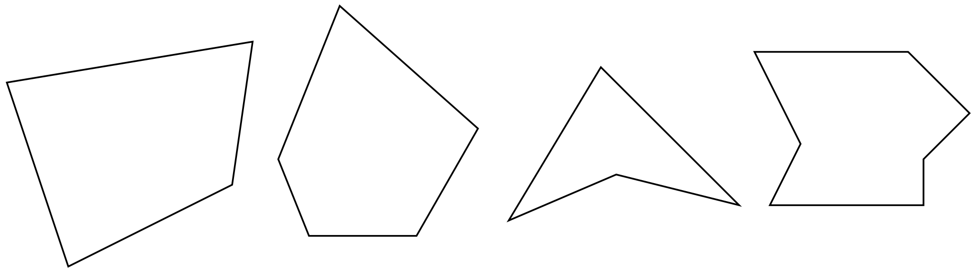
Een wiskundig raadseltje, in 1932 bedacht door Esther Klein, zou haar leven veranderen en een nieuw deelgebied binnen de wiskunde voortbrengen: *combinatorische meetkunde*. Paul Erdős was een van de leidende figuren in dit vak.

■ door Alex van den Brandhof en Klaas Pieter Hart

HAPPY END



Figuur 1 De eerste twee veelhoeken zijn convex, de laatste twee niet.

Tijdens zijn studietijd trok Paul Erdős regelmatig op met een groepje medestudenten. In het park of in een café werd er dan gediscussieerd over allerhande onderwerpen. Wiskunde stond daarbij niet op de laatste plaats. Een van de vrienden was Eszter (Esther) Klein. Op een winterdag in 1932 legde zij het vriendenclubje een probleem voor waarover zij had nagedacht.

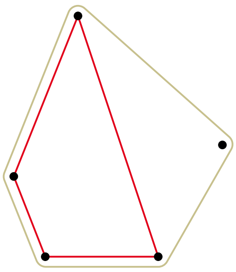
Teken vijf punten op een oppervlak – helemaal willekeurig, zolang er maar niet drie punten op één lijn liggen. Het is dan vanzelfsprekend mogelijk om een vierhoek te tekenen waarvan de hoekpunten vier van die vijf punten zijn. Het was Klein opgevallen dat het altijd mogelijk is om een *convexe* vierhoek te tekenen. Convex betekent, dat elke binnenhoek van de vierhoek kleiner is dan 180 graden. Als je twee punten binnen een convexe veelhoek verbindt met een lijnstuk, dan bevindt dat lijnstuk zich dus geheel binnen de veelhoek. In figuur 1 zie je een convexe vierhoek, een convexe vijfhoek en vervolgens twee niet-convexe veelhoeken.

Nadat Klein haar vrienden enige tijd liet peinzen over het waarom van haar ontdekking, kwam ze met haar bewijs. Ze stelde de vijf punten voor als spijkertjes die in een plank zijn geslagen. Vervolgens kun je een elastiekje spannen om de spijkertjes en wel zo, dat alle spijkertjes zich binnen het elastiekje bevinden. Klein beredeneerde dat zich in feite maar drie verschillende gevallen kunnen voordoen.

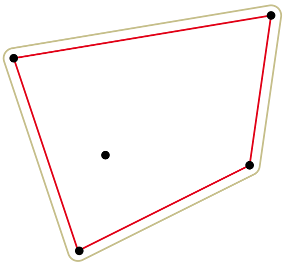
In het eerste geval wordt het elastiekje strakgehouden door alle vijf de spijkertjes, zoals in figuur 2. In dat geval vormt elk viertal punten een convexe vierhoek; het doet er niet toe wélke vier punten je met elkaar verbindt.

Een tweede mogelijkheid is dat het elastiekje strak wordt gehouden door vier spijkertjes. Deze situatie is getekend in figuur 3. Het elastiekje vormt uiteraard een convexe vierhoek, precies wat we willen.

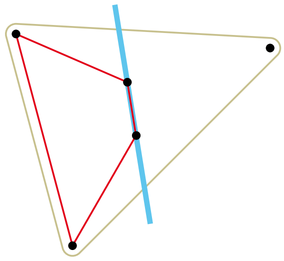
Er blijft nog één mogelijkheid over, en dat is wanneer het elastiekje strak wordt gehouden door drie spijkertjes, zoals in figuur 4. Ook in dit geval is het makkelijk om een convexe vierhoek te maken. Teken de lijn door de twee punten binnen de driehoek (blauw in figuur 4). Deze lijn snijdt geen van



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

de drie andere punten; we hadden in het begin immers aangenomen dat er niet drie punten op één lijn liggen. Aan de ene kant van de blauwe lijn bevindt zich dus één punt, aan de andere kant twee punten. Neem de twee punten aan dezelfde kant van de lijn; samen met de twee punten binnen de driehoek vormen die een convexe vierhoek.

Opgave 1. Als je de vijf punten in figuur 2, 3, en 4 bekijkt, kun je je afvragen *hoeveel* convexe vierhoeken er in een configuratie zitten. In figuur 2 kun je vijf convexe vierhoeken tekenen, in figuur 3 drie, en in figuur 4 is er slechts één mogelijk. Bestaan er configuraties van vijf punten met twee of vier convexe vierhoeken?

COMBINATIES

Combinatoriek gaat over het tellen van aantallen mogelijkheden. Zoiets is meestal eenvoudig zolang het aantal mogelijkheden klein is: je kunt dan gewoon alle mogelijkheden uitschrijven. In de combinatoriek wordt gezocht naar formules waarmee algemene gevallen kunnen worden berekend.

Een van de meest gebruikte begrippen is het *aantal combinaties*. Als je vijf keer achter elkaar met een munt werpt, hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er dan met twee keer 'kop' en drie keer 'munt'? Het is niet veel werk om alle mogelijkheden uit te schrijven: KKMMM, KMKMM, KMMKM, KMMMK, MKKMM, MKMKM, MKMMK, MMMKK, MMKMK en MMKKM. Het aantal mogelijkheden, 10, heet het *aantal combinaties van 2 uit 5*.

Om het aantal mogelijkheden te berekenen om k keer 'kop' te gooien in een reeks van n muntworpen, moet het aantal combinaties van k uit n worden berekend. Hiervoor geldt de volgende formule:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{\big(k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\big)\big((n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\big)}.$$

We schrijven dit kort als $\binom{n}{k}$ en spreken het uit als 'n boven k'.

De Schotse wiskundige James Stirling (1692-1770) vond de volgende benaderingsformule voor het aantal combinaties van k uit $2k$:

$$\binom{2k}{k}\approx\frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$$

voor grote waarden van k. Met deze formule kun je de bovengrens van $a(n)$ die Szekeres en Erdős in 1935 vonden (zie pagina 24), goed benaderen (neem $k = n - 2$). Voor $n = 50$ is de benaderingswaarde ongeveer $6{,}452 \times 10^{27}$, terwijl de exacte waarde zo'n $6{,}435 \times 10^{27}$ is. De benadering wijkt slechts 2,6 promille af van de werkelijke waarde, en die relatieve afwijking wordt alleen maar kleiner naarmate n groter wordt.

ALGEMENER Een ander lid van Erdős' vriendenclub was György (George) Szekeres. Hij was zo gegrepen door Esthers puzzel en haar elegante bewijsvoering, dat hij zich het volgende ging afvragen: hoeveel punten heb je nodig om er zeker van te zijn dat je altijd een convexe *vijfhoek* kunt krijgen? Endre Makai, eveneens lid van de vriendenclub, kwam er al gauw achter dat het met acht punten niet altijd gaat. Probeer het maar eens met de configuratie in figuur 5; je zult merken dat het niet lukt een convexe vijfhoek te maken. Bovendien toonde Makai aan dat het met negen punten (wederom: niet drie op één lijn) wél altijd mogelijk is. In figuur 6 is een negende punt toegevoegd aan het achttal punten van figuur 5, alsook een mogelijke convexe vijfhoek. Dit plaatje bewijst uiteraard nog niet dat het *altijd* lukt met negen punten!

Opgave 2. Hoeveel convexe vijfhoeken kun je tekenen in de configuratie van figuur 6? Kun je aan de configuratie van figuur 5 een negende punt toevoegen op een andere plek dan in figuur 6, zo dat je een ánder aantal convexe vijfhoeken kunt tekenen?

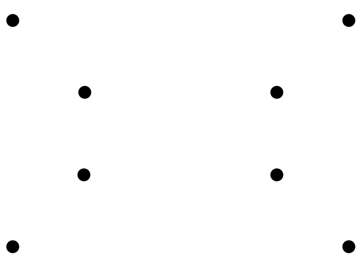
Opgave 3. Welke configuratie van negen punten geeft het kleinste aantal convexe vijfhoeken? Wat is het maximale aantal? Welke aantallen zijn er allemaal mogelijk?

De overgang van vierhoeken naar vijfhoeken lijkt simpel, maar niets is minder waar: Makais bewijs is flink ingewikkelder dan dat van Klein. Makai heeft zijn bewijs nooit gepubliceerd; het eerste officieel gepubliceerde bewijs liet 35 jaar op zich wachten: in 1970 publiceerden John Kalbfleisch, James Kalbfleisch en Ralph Gordon Stanton een bewijs.

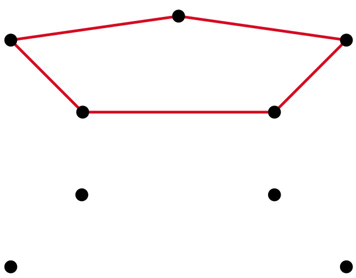
Szekeres en Erdős hadden de smaak te pakken en probeerden een formule te vinden voor het aantal punten dat nodig is om een convexe n-hoek te kunnen tekenen. Na heel wat probeersels kwamen ze tot het volgende vermoeden: het aantal punten dat nodig is om een convexe n-hoek te kunnen tekenen, is $2^{n-2} + 1$. Voor $n = 4$ en $n = 5$ klopt dit inderdaad: dat zijn de gevallen van Klein respectievelijk Makai.

De formule die Szekeres en Erdős hadden gevonden, leek ook te kloppen voor waarden van n groter dan 5. Maar het lukte hen niet een hard bewijs te vinden. Het bleef een vermoeden, gebaseerd op een boel tekeningetjes die ze hadden gemaakt.

Hoe onschuldig het probleem ook lijkt, Szekeres en Erdős hadden het idee dat de tot dan toe bekende wiskunde niet toereikend zou zijn om de puzzel te kraken: het vraagstuk boorde immers een nieuwe tak van wiskunde aan. Meetkunde bestaat al sinds Euclides (300 v.Chr.) en combinatoriek, het vakgebied dat draait om telproblemen (zie het kader



Figuur 5 Er kan geen convexe vijfhoek worden getekend waarvan de hoekpunten vijf van de getekende acht punten zijn.

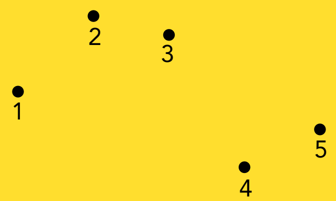


Figuur 6 Door het toevoegen van een negende punt lukt het wel om een convexe vijfhoek te tekenen.

EEN HAPPY ENDING VOOR 17 PUNTEN

Het geschetste bewijs van het geval van vijf punten met behulp van een elastiekje is heel lastig in een computerprogramma te vangen. Om de computer systematisch te laten zoeken, moeten we het probleem op een andere manier weergeven.

Wat Szekeres en Peters hebben gedaan, is de punten zó neerleggen dat de x-coördinaten van de punten allemaal verschillend zijn. Dat is niet zo moeilijk: er zijn maar eindig veel lijnen die door twee van de punten gaan (tien lijnen bij vijf punten). Draai het plaatje zo dat geen van die lijnen verticaal of horizontaal is. Nummer de punten van links naar rechts: 1, 2, 3, 4, 5.



Vervolgens geven we elke driehoek een teken, + of –, door te kijken of we de driehoek van links naar rechts in positieve (tegen de klok in) of negatieve (met de klok mee) richting doorlopen. Dus, bijvoorbeeld, $\sigma(123) = -$, $\sigma(345) = +$ en $\sigma(234) = -$.

De methode berust er nu op met behulp van deze tekens te herkennen wanneer een vierhoek convex is.

Neem een vierhoek $abcd$ (nog steeds genummerd van links naar rechts). We nemen aan dat b boven de lijn ad ligt, dus $\sigma(abd) = -$.
Er zijn vier mogelijke posities voor c:
- boven de lijn ab;
- onder de lijn ab en boven de lijn bd;
- onder de lijn bd en boven de lijn ad;
- onder de lijn ad.

In die gevallen is de vierhoek achtereenvolgens niet, wel, niet en wel convex. Als je de vier gevallen narekent, zul je zien dat de vierhoek convex is precies als

$$\sigma(abc) = \sigma(abd) \text{ en } \sigma(acd) = \sigma(bcd)$$

en *niet* convex precies als

$$\sigma(abc) = -\sigma(bcd) \text{ en } \sigma(abd) = \sigma(acd).$$

Nu kunnen we aantonen dat er een convexe vierhoek is. Stel namelijk dat alle vierhoeken *niet* convex zijn en dat $\sigma(123) = -$ (en dus $-\sigma(123) = +$). Door naar respectievelijk vierhoek 1234 en 1235 te kijken, zien we dat $\sigma(234) = -\sigma(123) = +$ en $\sigma(235) = -\sigma(123) = +$. Hieruit volgt dat $\sigma(234) = \sigma(235) = +$. Kijk vervolgens naar vierhoek 2345 om te zien dat $\sigma(245) = \sigma(235) = +$ en $\sigma(345) = -\sigma(234) = -$. Gebruik dan vierhoek 1345 om in te zien dat $\sigma(134) = -\sigma(345) = +$ en via 1234 vinden we nog $\sigma(124) = \sigma(134) = +$. Maar bekijk nu 1245: daaruit volgt dat $\sigma(245) = -\sigma(124) = -$. We hadden echter al $\sigma(245) = +$, een tegenspraak. Er is dus wél een convexe vierhoek.

Het computerbewijs dat er bij 17 punten altijd een convexe zeshoek is, gaat eigenlijk hetzelfde, alleen lang niet zo snel als hierboven. In de eerste plaats hebben Szekeres en Peters uitgevlooid waar σ aan moet voldoen als er geen convexe zeshoeken zijn; dit levert een lijst van acht voorwaarden. Deze voorwaarden hebben ze gecombineerd met de voorwaarden voor vierhoeken die we hierboven gevonden hebben. Daarna is het een kwestie van programmeren en de computer laten nagaan dat de aanname dat er geen convexe zeshoeken zijn tot een tegenspraak leidt.

Een pdf van het artikel 'Computer solution to the 17-point Erdös-Szekeres problem' staat op internet en is met Google eenvoudig te vinden.

op pagina 21), is een van de basisingrediënten van de kansrekening, het vak waarvan de geschiedenis teruggaat tot de zeventiende eeuw. Maar een kruisbestuiving tussen meetkunde en combinatoriek was nieuw.

BOVENGRENZEN Szekeres en Erdős bleken gelijk te hebben: tot op de dag van vandaag is het algemene probleem onopgelost. Dat wil niet zeggen dat er niets over bekend is. We schrijven vanaf nu $a(n)$ voor het aantal punten dat nodig is om een convexe n-hoek te kunnen tekenen. Hoewel Szekeres en Erdős hun vermoeden dat $a(n) = 2^{n-2} + 1$ niet konden bewijzen, vonden ze wel een *bovengrens* voor $a(n)$. In 1935 bewezen ze dat

$$a(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1.$$

Deze grens is niet bepaald scherp: de formule vertelt ons dat je met 71 punten gegarandeerd een convexe zeshoek kunt krijgen, terwijl het vermoeden zegt dat 17 punten reeds genoeg zijn. Toch is het al een hele prestatie om zo'n bovengrens te vinden, want het is helemaal niet evident dat zo'n grens überhaupt *bestaat*.

Szekeres en Erdős publiceerden hun bewijs in een artikel getiteld *'A Combinatorial Problem in Geometry'*. Dit artikel kan worden gezien als de geboorte van de 'combinatorische meetkunde'. Zonder dat zij zich ervan bewust waren, hadden ze met hun bewijs een stelling herontdekt uit 1928 van de Britse wiskundige Frank Ramsey. Ramsey, geboren in 1903, stierf een maand voor zijn zevenentwintigste verjaardag als gevolg van een chronische leverziekte. Ondanks zijn korte leven hoort Ramsey tot de belangrijkste wiskundigen van de twintigste eeuw; er is zelfs een theorie naar hem vernoemd. Het is niet ondenkbaar dat zonder het werk van Szekeres en Erdős de Ramseytheorie nooit van de grond zou zijn gekomen.‡

Meer dan zestig jaar is het wiskundigen niet gelukt om de bovengrens van Szekeres en Erdős te verscherpen. Maar in 1997 slaagde het wiskundige echtpaar Fan Chung en Ronald Graham erin om het resultaat van Szekeres en Erdős te verbeteren. Zij gaven een bewijs uit het ongerijmde dat voor $n \geq 4$ geldt:

$$a(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}.$$

Geen significante verbetering, want deze bovengrens is slechts 1 kleiner dan die van Szekeres en Erdős. Maar het werk van Chung en Graham zorgde wel voor hernieuwde belangstelling voor het probleem. De zaak kwam in een stroomversnelling en de volgende verbeteringen volgden elkaar snel op. In 1998 bewezen Daniel Kleitman en Lior Pachter dat

$$a(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+7-2n$$

voor $n \geq 4$. Ingeval $n = 6$ is deze bovengrens 65: een verbetering van 5 ten op zichte van Chung en Graham. Geza Toth en Pavel Valtr bewezen niet veel later dat

$$a(n) \leq \binom{2n-5}{n-2}+2$$

voor $n \geq 5$; een verbetering van ruwweg een factor 2 (voor $n = 6$ is de bovengrens 36). En in 2005 wist het duo hun bovengrens met nog eens 1 te verkleinen:

$$a(n) \leq \binom{2n-5}{n-2}+1.$$

CONVEXE ZESHOEKEN De grootste doorbraak tot nog toe kwam in het eerste decennium van deze eeuw. In 2005 bewezen Szekeres – hij was toen 94 jaar oud – en de Australiër Lindsay Peters het vermoeden voor het geval $n = 6$: het aantal punten dat nodig is om een convexe zeshoek te kunnen tekenen, is $2^{6-2} + 1 = 17$ (zie het kader op pagina 23). Deze mijlpaal kwam kort voor Szekeres' dood; de publicatie van het bewijs in *The ANZIAM Journal* in 2006 heeft hij niet meer mogen meemaken. Het bewijs maakt gebruik van moderne technieken, inclusief berekeningen die zonder computers onmogelijk zijn.

Voor $n \geq 7$ is het probleem nog altijd onopgelost. Wie het algemene vermoeden weet te bewijzen, wordt in één klap beroemd binnen de wiskunde. Maar ook het vinden van een bewijs voor bijvoorbeeld $n = 7$ is een grootse prestatie.

Erdős reserveerde een deel van het geld dat hij met lezingen en gastcolleges verdiende als prijzengeld voor het oplossen van zijn vermoedens. Sinds zijn dood in 1996 staat Ronald Graham garant voor eventuele uitbetaling. Een bewijs van het Erdős-Szekeres-vermoeden is 1000 dollar waard.

TOT SLOT Je vraagt je misschien af waar de titel van dit artikel op slaat. Daar zit een mooie anekdote aan vast. George Szekeres viel als student niet alleen op Esthers probleem dat zij tijdens die winterontmoeting in 1932 voorlegde, maar ook op Esther als persoon. De liefde was wederzijds. Wat begon als een probleem over spijkertjes en een elastiekje, eindigde in een lang en gelukkig huwelijk: in 1936 trouwden de twee. Sindsdien noemde Erdős het Szekeres-Erdős-vermoeden het 'Happy-ending-problem'. George en Esther overleden beiden op 28 augustus 2005, nog geen uur na elkaar. ■

‡ Over het klassieke voorbeeld uit de Ramsey-theorie, het *Party-problem*, verscheen het artikel 'De stelling van Ramsey' in *Pythagoras* 44-5 (april 2005).