PAUL ERDŐS ▶ AFLEVERING 7

Het vorige jaar heeft de redactie van *Pythagoras* uitgeroepen tot Erdősjaar: ter gelegenheid van de honderdste geboortedag op 26 maart 2013 van de legendarische wiskundige Paul Erdős verscheen in elke *Pythagoras* die in 2013 uitkwam, een artikel over de wiskunde die Erdős na aan het hart lag. De 'Erdős-wiskunde' is zó leuk, dat we genoeg stof hebben voor meer afleveringen. We zetten de serie daarom nog even voort.

■ door Klaas Pieter Hart

CONVEXE VEELHOEKEN

Paul Erdős bewees samen met zijn goede vriend George Szekeres dat, gegeven een natuurlijk getal n, je altijd een natuurlijk getal N kunt vinden zó dat in elk N-tal punten in het vlak (waarvan er niet drie op één lijn liggen) een convexe n-hoek te vinden is. De vraag is wat de kleinste waarde van N is, die voldoet. Erdős en Szekeres vermoedden dat $N = 2^{n-2} + 1$ genoeg is. Over dit vermoeden, dat nog steeds open staat, ging het artikel 'Happy end' in *Pythagoras* 52-4 (februari 2013).

In dit artikel bekijken we hoe Erdős en Szekeres in ieder geval konden laten zien dat er überhaupt zo'n N is, en hoe ze de eerste bovengrenzen voor die N bepaalden.

ERDŐS, SZEKERES EN VIERTALLEN In elk vijftal punten (waarvan niet drie op één lijn) kun je altijd een convexe vierhoek vinden. Het bewijs van dit speciale geval van het vermoeden van Erdős en Szekeres, afkomstig van Esther Klein, kun je lezen in het genoemde artikel 'Happy end'.

De eerste stap in hun algemene onderzoekingen was de volgende opmerking: een n-tal punten $x_1, ..., x_n$ in het vlak vormen een convexe n-hoek precies dan als elk viertal uit dat n-tal een convexe vierhoek vormen.

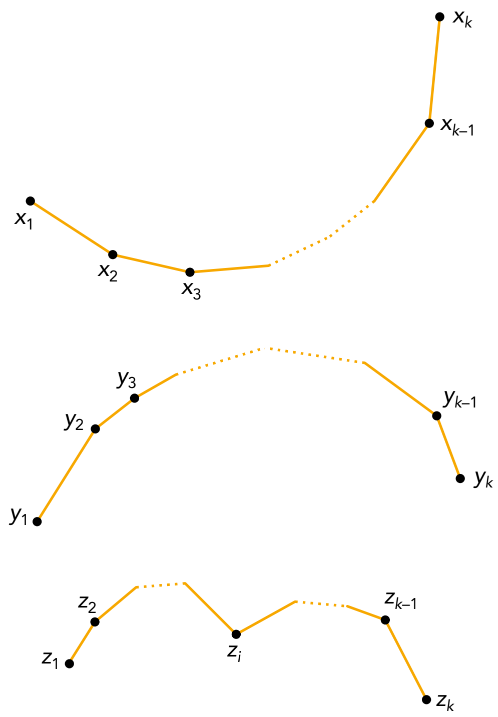
Opgave 1. Kun je deze bewering zelf bewijzen?

Gecombineerd met de opmerking van Esther Klein dat je in elk vijftal een convex viertal kunt vinden laat dit zien dat in een grote hoeveelheid punten een heleboel convexe viertallen te vinden zijn: elk vijftal bevat tenslotte een convex viertal. Dit suggereert toch wel een beetje dat er een N als gewenst zou moeten bestaan.

De oplossing van het probleem bleek al te bestaan. Het bestaan van zo'n N volgt namelijk uit een stelling die een paar jaar eerder was bewezen en die nu bekend staat als de Stelling van Ramsey. Deze zeer algemene stelling zegt, in het geval waarin we geïnteresseerd zijn, het volgende.

Stelling van Ramsey. Voor elke n bestaat een N met de volgende eigenschap: telkens als je de viertallen getallen uit $\{1, 2, ..., N\}$ in twee groepen verdeelt, zeg A en B, dan kun je n getallen $a_1, ..., a_n$ in $\{1, 2, ..., N\}$ vinden zó dat het volgende geldt: alle viertallen uit $\{a_1, ..., a_n\}$ zitten in A óf alle viertallen uit $\{a_1, ..., a_n\}$ zitten in B.

Hiermee is het probleem opgelost: neem, bij gegeven $n \geq 5$, de N uit de Stelling van Ramsey. Neem nu N punten in het vlak en verdeel de viertallen in twee groepen: groep A bestaat uit de convexe viertallen, groep B bestaat uit de rest: de niet-convexe viertallen. De Stelling van Ramsey garandeert ons dan dat er n punten $x_1, ..., x_n$ zijn zó dat alle viertallen uit $\{x_1, ..., x_n\}$ tot A behoren of zó dat alle viertallen uit $\{x_1, ..., x_n\}$ tot B behoren. De laatste mogelijkheid kan echter niet: telkens als je vijf (of meer) punten hebt, zit daar een convex viertal onder. Dat is het geval van Esther Klein. Er moet dus gelden dat alle viertallen uit $\{x_1, ..., x_n\}$ tot A beho-



De k-hoeken $x_1x_2...x_k$ en $y_1y_2...y_k$ zijn convex. De k-hoek $z_1z_2...z_k$ is dat niet.

ren. Dat wil zeggen dat al die viertallen convex zijn. Uit opgave 1 volgt dan dat de n-hoek bepaald door $\{x_1, ..., x_n\}$ zélf convex is.

TARSY EN DRIETALLEN Zoals gezegd, de Stelling van Ramsey is heel algemeen; hij geldt niet alleen voor viertallen, maar ook voor tweetallen (zie het artikel 'De stelling van Ramsey', *Pythagoras* 44-5 (april 2005)), voor drietallen, ..., voor k-tallen, ...

Met behulp van de stelling voor drietallen kun je het n-hoekprobleem ook oplossen. Tijdens een tentamen vond Michael Tarsy, een Israelische student, het volgende argument: neem, bij gegeven n, het getal N als gegarandeerd door de Stelling van Ramsey voor *drietallen*. Neem nu N punten in het vlak en nummer ze willekeurig. Verdeel de drietallen in twee groepen: A bestaat uit de drietallen die tegen de klok in genummerd worden en B bestaat uit de drietallen die met de klok mee genummerd zijn. Dan zijn er dus n punten waarvan óf alle drietallen tegen de klok in gaan óf alle drietallen met de klok mee. Dan vormen die n punten een convexe n-hoek.

Opgave 2. Bewijs die laatste bewering. Hint: bewijs dat elke vierhoek convex is.

EEN BOVENGRENS VOOR N DOOR ERDŐS EN SZEKERES Beide toepassingen van de Stelling van Ramsey geven nogal grote bovengrenzen voor de N die je nodig hebt om een convexe n-hoek te garanderen. In hun artikel over de convexe n-hoeken bewezen Erdős en Szekeres ook een stelling over monotone rijen:

Stelling van Erdős en Szekeres over monotone rijen. Gegeven is een rij met $n^2 + 1$ verschillende getallen. Hieruit kan je zeker ofwel een monotoon dalende ofwel een monotoon stijgende deelrij met $n + 1$ elementen kiezen.

In het artikel 'Van klein naar groot' in *Pythagoras* 53-1 (september 2013) is het bewijs van Abraham Seidenberg te lezen. Het bewijs van Erdős en Szekeres zelf, dat wat ingewikkelder was dan dat van Seidenberg, combineerden ze met een ander idee om zo op veel betere bovengrenzen voor N te komen. Dat idee hebben we ook al aan het werk gezien in *Pythagoras* (zie opnieuw het artikel 'Happy end'): als je de punten in het vlak hebt gekozen, kun je de hele configuratie zó draaien dat geen enkele verbindingslijn tussen twee punten evenwijdig aan de x- of y-as loopt. Dat betekent dat voor elk tweetal punten x_1 en x_2 de helling van de lijn x_1x_2 ongelijk aan nul is (en ook ongelijk aan oneindig).

Neem een aantal van die punten, zeg $x_1, ..., x_k$, genummerd van links naar rechts; als de hellingen van $x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{k-1}x_k$ een monotone rij vormen, dan is de k-hoek $x_1x_2...x_k$ zeker convex (zie de eerste twee plaatjes in bovenstaande figuur).

Het bewijs gaat nu als volgt: definieer voor k en l het getal $C(k, l)$ als het kleinste aantal punten dat je nodig hebt om te garanderen dat je k punten hebt met een stijgende rij hellingen of l punten met een dalende rij hellingen. Dan is de kleinste N die we voor een convexe n-hoek nodig hebben niet groter dan $C(n, n)$.

Erdős en Szekeres bewezen toen de volgende formule:

$$C(k, l) = C(k-1, l) + C(k, l-1) - 1. \qquad (*)$$

Opgave 3. Ga zelf na dat $C(k, 3) = k$ voor alle k, en dat altijd $C(k, l) = C(l, k)$.

Door terug te rekenen kun je een formule voor $C(n, n)$ opstellen:

$$C(n,n) = \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Opgave 4. Probeer dit zelf af te leiden (zie ook 'De stelling van Ramsey', *Pythagoras* 44-5 (april 2005)).

HET BEWIJS We nemen $C(k-1, l) + C(k, l-1) - 1$ punten en tonen aan dat we k punten met stijgende hellingen kunnen vinden of l punten met dalende hellingen. Hoe werkt dat? Door zoveel mogelijk stijgende en dalende rijtjes te verzamelen en dan te concluderen dat we hebben wat we zochten.

Neem de eerste $C(k-1, l)$ punten; daar vinden we l punten met dalende hellingen (en dan zijn we klaar) of $k-1$ punten met stijgende hellingen. In dat laatste geval noemen we het laatste punt in dat rijtje a_1; we zetten het apart en voegen punt nummer $C(k-1, l) + 1$ toe. Weer vinden we l punten met dalende hellingen (en dan zijn we klaar) of $k-1$ punten met stijgende hellingen; in het eerste geval stoppen we en in het tweede geval noemen we het laatste punt a_2, zetten het apart en voegen punt nummer $C(k-1, l) + 2$ toe.

In het ongunstigste geval vinden we zo een rij punten $a_1, a_2, ..., a_{C(k, l-1)}$ die elk aan het eind van een rijtje van lengte $k-1$ met stijgende hellingen staan. Onder deze punten vinden we er k met stijgende hellingen (en zijn we weer klaar) of $l-1$ met dalende hellingen, zeg $b_1, ..., b_{l-1}$. Nu is b_1 eindpunt van een rij $c_1, ..., c_{k-2}, c_{k-1} = b_1$ met stijgende hellingen. Omdat geen drie punten op één lijn liggen, zijn de twee hellingen $c_{k-2}b_1$ en b_1b_2 verschillend.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

- helling $c_{k-2}b_1$ is kleiner dan helling b_1b_2; dan vormen de hellingen in $(c_1, ..., c_{k-2}, b_1, b_2)$ een stijgende rij.
- helling $c_{k-2}b_1$ is groter dan helling b_1b_2; dan vormen de hellingen in $(c_{k-2}, b_1, ..., b_{l-1})$ een dalende rij.

Opgave 5. Onderzoek wat er gebeurt als je dit bewijs toepast op de stelling van Erdős en Szekeres over monotone rijen. Definieer getallen $M(k, l)$ en probeer een formule als in $(*)$ te bedenken.

(ON)GELIJKHEID Strikt genomen hebben we alleen bewezen dat $C(k, l) \leq C(k-1, l) + C(k, l-1) - 1$, en dus ook dat

$$C(n,n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Erdős en Szekeres schreven in hun artikel dat het niet heel moeilijk is om aan te tonen dat

$$C(n,n) > \binom{2n-4}{n-2}.$$

Dat wil zeggen dat je altijd $\binom{2n-4}{n-2}$ punten kunt tekenen zonder een n-tal met stijgende hellingen en zonder een n-tal met dalende hellingen.

Opgave 6. Bereken $C(3, 3)$, $C(4, 4)$ en $C(5, 5)$ en maak telkens een verzameling met $C(n, n) - 1$ punten die niet een rijtje van lengte n hebben met een monotone rij hellingen.

OVER DE BOVENGRENS Voor de binomiaalcoëfficiënt die in de formule voor $C(n, n)$ staat, geldt een mooie schatting:

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

Hieruit concluderen we dat $C(n, n)$ ongeveer zo groot is als 4^{n-2} en dat is toch een stuk groter dan de vermoede waarde van $2^{n-2} + 1$ voor de N die nodig is voor convexe n-hoeken.

Opgave 7. Probeer de ongelijkheden voor $\binom{2n}{n}$ zelf te bewijzen of zoek op internet naar een bewijs. ■