Er zijn vijf Nederlanders met Erdősgetal 1. Een van hen is N.G. de Bruijn: tussen 1948 en 1953 schreef hij samen met Erdős zes artikelen. Dit artikel gaat over hun derde gemeenschappelijke artikel, '*A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*' uit 1951.

■ door Klaas Pieter Hart

GROEPSINDELINGEN

In het najaar van 1948 zette Paul Erdős – na een verblijf van tien jaar in de Verenigde Staten – weer voet op Europese bodem. Hij verbleef toen ook twee maanden in Nederland, waar hij werkte met Nicolaas de Bruijn en Jurjen Koksma. Met De Bruijn werkte hij aan een paar combinatorische problemen. Drie jaar later werkten ze opnieuw samen. Ze bewezen een stelling over het kleuren van grafen, die op veel manieren gebruikt kan worden. Bijvoorbeeld bij het verdelen van mensen in groepjes: als je niet wilt dat er ruzie ontstaat, moet je niet twee mensen in de groep hebben waarvan één de ander niet aardig vindt.

Stel eens dat jouw klas in groepen verdeeld moet worden en dat iedereen ten hoogste twee mensen niet bij zich in de groep wil hebben. In hoeveel groepen kun je de mensen dan verdelen en iedereen tevreden houden? Het antwoord van De Bruijn en Erdős was: je hebt nooit meer dan vijf groepen nodig – zelfs als je klas uit oneindig veel leerlingen zou bestaan!

Als iedereen niet meer dan één persoon niet aardig vindt, kun je met drie groepen toe. En in het algemeen: als iedereen ten hoogste k mensen niet wil zien, lukt het met $2k + 1$ groepen.

EEN KLAS VAN ZES PERSONEN We bewijzen de stelling eerst voor een simpel geval. We nemen een klas van zes personen en nemen $k = 2$: iedereen vindt ten hoogste twee personen niet aardig. We gaan bewijzen dat het altijd lukt om de klas in ten hoogste vijf groepen te verdelen. (Als de klas uit minder dan zes personen zou bestaan, is het natuurlijk flauw: dan zetten we iedereen apart en er is geen probleem!)

Maak een plaatje met voor iedere persoon een punt. Trek een pijl van persoon a naar persoon b als a niet bij b in een groep wil. Op pagina 23 zie je een voorbeeld. De personen 1 en 2 vinden elkaar kennelijk niet aardig.

Hoeveel pijlen hebben we? In ons voorbeeld zijn het er twaalf: iedereen vindt twee mensen niet aardig. In het algemeen kan het aantal pijlen ook kleiner zijn. Meer dan twaalf pijlen is natuurlijk niet mogelijk: vanuit elk van de zes punten worden niet meer dan twee pijlen getrokken. In elk punt kunnen meer dan twee pijlen samenkomen: elke persoon die jou niet leuk vindt, levert een pijl naar jou toe. In het slechtste geval wijzen er vijf pijlen naar jou. In ons voorbeeld wordt persoon 2 het minst aardig gevonden: naar hem wijzen vier pijlen.

De bewering is nu dat er altijd een punt is waar ten hoogste vier pijlen samenkomen (in ons voorbeeld komen alleen bij 2 en 5 meer dan vier pijlen samen). Dat volgt uit een formule die voor elk van dit soort plaatjes geldig is. Noteer voor elk punt x met $d(x)$ het aantal pijlen dat in x samenkomt en met N het totaal aantal pijlen in het plaatje. Dan geldt:

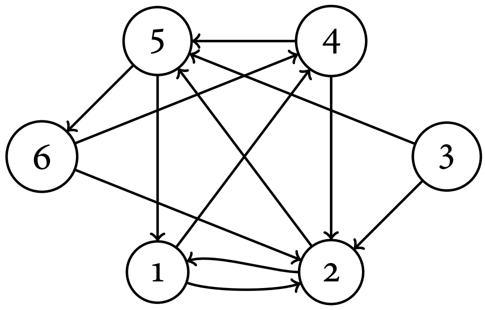
$$\sum_x d(x) = 2N.$$

Hierin staat links de som van alle $d(x)$-en; die som telt elke pijl twee keer: één keer bij het vertrekpunt en één keer bij het eindpunt. Daarom staat rechts dus $2N$.

In ons voorbeeld is $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) + d(6) = 4 + 6 + 2 + 4 + 5 + 3 = 24$, en dit is inderdaad 2 keer het aantal pijlen. In het algemeen geldt dat $N \leq 12$, en dus $2N \leq 24$. Als voor elke x zou gelden dat $d(x) \geq 5$, dan zou de som ten minste 30 zijn en dat kan dus niet. Er is dus een x met $d(x) \leq 4$. Er is dus ten minste één persoon waar deze x bij geplaatst kan worden.

In ons voorbeeld voldoen 1, 3, 4 en 6. Neem bijvoorbeeld $x = 4$; dan kan 4 met 3 door één deur en we krijgen de volgende groepen: {1}, {2}, {3, 4}, {5} en {6}.

EEN GROTERE KLAS Hoe weten we zeker dat we de klas *altijd* in ten hoogste vijf groepen kunnen verdelen, ook als er meer dan zes personen zijn? (We nemen nog steeds $k = 2$: iedereen vindt ten hoogste twee personen niet aardig.) Dit kunnen we aantonen met behulp van het principe van *vol-*



ledige inductie. Stel je een oneindig lange rij dominostenen voor. Als je de eerste steen een zetje geeft, valt de tweede steen om, die er op zijn beurt voor zorgt dat de derde steen omvalt. Dit gaat zo eindeloos door, maar dat tikje tegen de eerste steen is wel noodzakelijk, anders wordt de *wave* niet in gang gezet. Het bewijsprincipe van volledige inductie gaat in feite net zo.

Stel dat de klas uit n personen bestaat en neem aan dat we al bewezen hebben dat we groepen van $n-1$ (of minder) mensen veilig in vijf groepen kunnen verdelen. Teken (in gedachten) een plaatje, net als in het geval van zes personen. We weten dat daar ten hoogste $2n$ pijlen in voorkomen, en dus

$$\sum_x d(x) \leq 4n.$$

Net als hierboven kan het niet zo zijn dat $d(x) \geq 5$ voor *alle* x, want dan zouden we vinden dat

$$4n \geq \sum_x d(x) \geq 5n$$

en dat kan dus niet. Neem een persoon x met $d(x) \leq 4$. De rest van de mensen kunnen we, volgens de aanname, in vijf groepen verdelen zonder dat er problemen ontstaan. Dan is er een groep waar x niet door een pijl mee verbonden is en daar kunnen we die persoon dan veilig bij stoppen.

We kunnen nu concluderen dat een klas van n personen altijd in ten hoogste vijf groepen verdeeld kan worden, voor elke waarde van n. Waarom is deze conclusie gerechtvaardigd? We hebben onder het kopje 'Een klas van zes personen' bewezen dat de stelling geldt voor $n = 6$ (dit heet de *inductiebasis*; bij de dominostenen is dit de eerste steen, deze krijgt handmatig een zetje). Zojuist hebben we bewezen dat onder de aanname dat $n-1$ mensen in vijf groepen verdeeld kunnen worden, dit ook bij n mensen mogelijk is (dit heet de *inductiestap*). Deze inductiestap garandeert dus dat de stelling ook geldt voor $n = 6 + 1 = 7$. Nog een keer de inductiestap toepassen levert op dat de stelling klopt voor $n = 7 + 1 = 8$. Op dezelfde manier kunnen we voor élke vaste maar willekeurig gekozen n bewijzen dat de stelling geldt: we beginnen met de inductiebasis en dan voeren we de inductiestap net zo lang uit tot we bij de gewenste n zijn aangekomen.

Opgave. Bewijs de stelling van Erdős en De Bruijn voor algemene k: als iedereen ten hoogste k personen niet aardig vindt, kun je de mensen verdelen in ten hoogste $2k + 1$ groepen. Vervang daartoe in ons bewijs elke 2 door k, elke 4 door $2k$ en elke 'vijf' door $2k + 1$. Ga dit zelf zorgvuldig na.

ONEINDIG VEEL MENSEN Het bewijs voor oneindig veel mensen maakt gebruik van een bijzonder principe uit de logica: het *compactheidsprincipe*. Hoewel fraai is dat principe in het begin niet makkelijk te doorgronden, maar als je het eenmaal doorhebt, kun je er een heleboel dingen mee bewijzen.

Stel dat we oneindig veel mensen hebben, voor elk natuurlijk getal één. Iedereen vindt twee mensen zo onaardig dat ze daar niet mee in een groep willen zitten. We laten zien dat we de mensen in vijf groepen kunnen verdelen waarin niemand elkaar onaardig vindt. Dat gaat als volgt.

Omdat voor elk eindig aantal mensen zo'n verdeling bestaat, kunnen we in het bijzonder voor elke n de eerste n mensen op een goede manier in vijf groepen verdelen. Zo'n verdeling coderen we met een functie

$$f_n \colon \{1, ..., n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Hierbij betekent bijvoorbeeld $f_n(1) = 5$ dat bij de n-de verdeling persoon 1 in groep 5 komt. Het hoeft niet zo te zijn dat 1 altijd in de groep met hetzelfde nummer terecht komt. Denk aan de situatie met zes mensen. Bij vijf of minder kunnen we zonder nadenken iedereen in zijn/haar eigen groep stoppen, maar als persoon 6 door niemand van de eerste vijf aardig gevonden wordt, komt hij alleen in een groep terecht en moeten de andere vijf in vier groepjes worden verdeeld; hun oorspronkelijke verdeling wordt dus omgegooid.

Wat wel gebeurt is dat persoon 1 *oneindig vaak* hetzelfde groepsnummer krijgt: als je oneindig vaak een getal uit {1, 2, 3, 4, 5} kiest, moet je zeker één van die getallen oneindig vaak kiezen. Neem zo'n waarde, 3 bijvoorbeeld, definieer $f(1) = 3$ en noteer $A_1 = \{n : f_n(1) = 3\}$.

Nu kijken we naar 2; om dezelfde reden als voor persoon 1 is er een getal, dat we met $f(2)$ noteren, zó dat $f_n(2) = f(2)$ voor oneindig veel n uit A_1, noteer $A_2 = \{n : n \in A_1 \text{ en } f_n(2) = f(2)\}$.

Zo bouwen we stapje voor stapje een functie f: $\mathbf{N} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ op: als we $f(i)$ weten voor $i \leq m$ en als $A_m = \{n : f_n(i) = f(i) \text{ voor } i \leq m\}$ oneindig is, dan kunnen we een waarde $f(m + 1)$ vinden zó dat $A_{m+1} = \{n : n \in A_m \text{ en } f_n(m + 1) = f(m + 1)\}$ weer oneindig is.

De functie f die zo ontstaat is als gewenst: neem maar twee personen, i en j, waarvan i de pest heeft aan j. Neem $m = \max\{i, j\}$, dan geldt $f_n(i) = f(i)$ en $f_n(j) = f(j)$ voor elke $n \in A_m$ en omdat elke f_n een goede verdeling codeert, volgt nu $f(i) \neq f(j)$.

WAAROM ZO INGEWIKKELD? Je zou misschien denken dat we het bewijs voor het eindige geval kunnen gebruiken om f meteen te construeren, maar het voorbeeld in de vorige paragraaf laat zien dat dat niet altijd lukt: als de verdeling van $\{1, ..., m\}$ zó is dat in elke groep iemand zit die persoon $m + 1$ niet leuk vindt, dan moet die verdeling omgegooid worden omdat $m + 1$ bij geen enkele groep kan aanschuiven.

EEN ALTERNATIEF In het bovenstaande bewijs zit nog een mooie stelling verstopt. Om dat duidelijk te maken, doen we het volgende. Noteer met T_n de verzameling van *alle* functies f: $\{1, ..., n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die een goede verdeling coderen. Merk op: als f tot T_n behoort en $m < n$, dan behoort de beperking van f tot $\{1, ..., m\}$ tot T_m. We zeggen wel dat de vereniging T van alle T_n een boom vormt. Verder weten we dat geen enkele T_n leeg is.

Er is een beroemde stelling, bekend als het *Oneindigheidslemma van Konig*, die zegt dat in een oneindige boom waarin alle niveaus eindig zijn, een tak bestaat die elk niveau snijdt. In ons geval betekent dat, dat er een rij functies f_n is met $f_n \in T_n$ voor alle n en zo dat f_n een uitbreiding van f_m is als $m < n$. Dan bepalen de f_n samen een goede verdeling van $\mathbf{N}$.

Als je het bewijs goed leest, zul je zien dat onze f inderdaad een oneindige tak in de boom T bepaalt.

WAAROM LOGICA? Wat heeft dit probleem met logica te maken? Welnu, er is een manier om van 'eindig' naar 'oneindig' te springen die bijna op tovenarij lijkt, maar die achteraf heel voor de hand liggend is (net als zoveel goocheltrucs). Je kunt de eisen en wensen namelijk in formules uitdrukken. Hier hebben we een paar letters voor nodig (de vakterm is 'predikaten'). Voor elke groep die we willen maken hebben we G_j: we korten 'i zit in groep j' af met $G_j(i)$. Nu kunnen we 'iedereen komt in een groep' uitdrukken als

$$\forall x : G_1(x) \vee G_2(x) \vee G_3(x) \vee G_4(x) \vee G_5(x).$$

Hierin staat $\forall$ voor 'voor alle' en $\vee$ voor 'of'. Verder hebben we tien formules die samen uitdrukken dat niemand in twee groepen tegelijk zit: als $1 \leq i < j \leq 5$, dan

$$\forall x : \neg(G_i(x) \wedge G_j(x))$$

($\neg$ betekent 'niet' en $\wedge$ betekent 'en'). Ook hebben we nog een predikaat H om uit te drukken dat mensen elkaar niet mogen: $H(i, j)$ kort af dat persoon i persoon j niet aardig vindt. Dit geeft ons nog vijf formules:

$$\forall x\, \forall y : \neg(G_i(x) \wedge G_j(y) \wedge H(x, y)).$$

Hiernaast krijgen we nog een heleboel formules om aan te geven wie wie niet mag: als persoon i niet bij persoon j wil, voegen we

$$H(i, j)$$

aan de lijst formules toe.

Een goede verdeling van de mensen creëert een situatie waarin aan alle formules is voldaan. Aan het begin van dit artikel hebben we in feite gezien dat we voor elk *eindig* aantal formules zo'n situatie kunnen maken. De zogeheten *Compactheidsstelling* uit de logica zegt dat dit voldoende is om het bestaan van zo'n situatie voor *alle* formules te garanderen. Het bewijs van die stelling is niet eenvoudig, maar wel heel mooi. Nog mooier zijn de vele toepassingen.

Deze stelling hebben we, bijvoorbeeld, ook nodig als we andere verzamelingen dan die van de natuurlijke getallen gebruiken om onze mensen te nummeren. Als we voor elk *reëel* getal een persoon hebben en een verdeling willen maken, dan zal ons bewijs niet meer werken. Met de Compactheidsstelling gaat het voor elke verzameling nog steeds.

DRIE VERZAMELINGEN We bekijken tot slot een speciaal geval, dat van een afbeelding $f\colon X \to X$ van een verzameling naar zichzelf met de eigenschap dat $f(x) \neq x$ voor alle x. De algemene versie van de stelling garandeert dus dat X te verdelen is in drie verzamelingen G_1, G_2 en G_3 met de eigenschap dat $f[G_i] \cap G_i = \varnothing$.

Dit geval wordt in de verzamelingenleer en in de topologie veel gebruikt en er zijn ook aparte bewijzen voor bedacht. Eén zo'n bewijs gaat als volgt. We definiëren voor elke n de afbeelding f^n als de n-de herhaling van f, dus $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, enzovoort. Ook spreken we af dat $f^0(x) = x$ voor alle x.

We zeggen dat x en y door f aan elkaar verbonden zijn als er een m en een n bestaan zó dat $f^m(x) = f^n(y)$. Voor elke x bekijken we de verzameling V_x van alle y die met x verbonden zijn.

Nu geldt voor elke x en y dat $V_x = V_y$ of $V_x \cap V_y = \varnothing$. Dat bewijs je als volgt. Stel dat $z \in V_x \cap V_y$; dan zijn er getallen i en j met $f^i(x) = f^j(z)$ en ook k en l met $f^k(z) = f^l(y)$. Als, bijvoorbeeld, $j < k$ tel dan $k - j$ bij i op, dan volgt $f^{i+k-j}(x) = f^k(z) = f^l(y)$, dus y en x zijn ook verbonden. Op dezelfde manier kun je laten zien dat elk punt dat verbonden is met x ook met y verbonden is en omgekeerd; dus $V_x = V_y$.

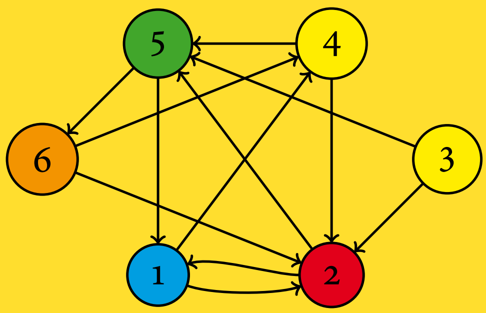
We hoeven nu alleen nog elke V_x in drie verzamelingen op te delen. Neem x vast en neem voor elke $y \in V_x$ de kleinste twee natuurlijke getallen n en m met de eigenschap dat $f^m(x) = f^n(y)$ ($m = 0$ en $n = 0$ zijn mogelijk). We gebruiken die getallen om V_x op te delen: $G_1 = \{y : m + n \text{ is oneven}\}$ en $G_2 = \{y : m + n \text{ is even}\}$. Dan geldt $V_x = G_1 \cup G_2$ en $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, dus als $f[G_1] \subseteq G_2$ en $f[G_2] \subseteq G_1$ zijn we klaar.

Wat kan gebeuren, is dat er een $x \in G_1$ is met $f(x) \in G_1$ (of er is zo'n punt in G_2). Dat gebeurt alleen als er een punt y is met een *oneven* $n > 1$ zó dat $f^n(y) = y$ en $f^{n-1}(y)$, $y \in G_1$. Dan is het nodig $G_3 = \{f^{n-1}(y)\}$ te zetten. In alle andere gevallen kunnen we met twee verzamelingen toe.

Een eenvoudig voorbeeld van een situatie waar drie verzamelingen nodig zijn, is $X = \{1, 2, 3\}$ met $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ en $f(3) = 1$. ■

PUNTEN KLEUREN Het artikel van De Bruijn en Erdős ('A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations') is online te vinden in het Erdős-archief (www.renyi.hu/~p_erdos). Het is geschreven in de taal van de grafentheorie; in plaats van over groepsindelingen gaat het over het kleuren van punten in plaatjes zoals wij gebruikt hebben, waarbij men punten die met een pijl verbonden zijn verschillend wil kleuren. De stelling luidt in hun termen:

Als vanuit elk punt ten hoogste *k* pijlen vertrekken, dan kunnen we de punten met $2k + 1$ (of minder) kleuren kleuren en wel zó dat van elke pijl de kop en de staart verschillende kleuren krijgen.



De kleuring van onze graaf, met vijf kleuren.