Op YouTube staat een video van NumberPhile die heel wat discussie heeft losgemaakt (zie http://goo.gl/WuYKW8). In de video wordt 'uitgelegd' dat $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$. Is dit nu waar of niet? Paul Levrie schreef in de vorige *Pythagoras* over de betekenis en achtergronden van deze formule. In dit artikel zullen we proberen zo dicht mogelijk in de buurt te komen van een goede definitie om een dergelijke som een zinvolle interpretatie te geven.

■ door Klaas Pieter Hart

ONEINDIG VEEL GETALLEN OPTELLEN

Is het optellen van oneindig veel getallen onmogelijk? Dat hangt er maar vanaf wat je eronder verstaat. Het is niet moeilijk om te accepteren dat $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ gelijk is aan 2. Het sommeren van rijen als $1 + 2 + 3 + \cdots$ lijkt echter onzinnig.

Voor we bekijken hoe we *systematisch* oneindige sommen kunnen definiëren, maken we onderscheid tussen nuttige en niet-zo-nuttige definities. Stel, we hebben een manier bedacht om de som te bepalen van een oneindige rij getallen. Deze optelling moet dan op zijn minst aan de volgende drie eisen voldoen.

Voor twee rijen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ en $b_0, b_1, b_2, \ldots$ waarvoor volgens de door ons bedachte definitie geldt:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = s,$$

en

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots = t,$$

willen we dat ook geldt:

1. $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots = s + t$;
2. $ka_0 + ka_1 + ka_2 + \cdots = ks$, voor elke constante k;
3. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s - a_0$.

De derde eigenschap wordt in het filmpje van NumberPhile impliciet een aantal malen gebruikt.

Nu gaan we een aantal methoden bekijken die op een of andere manier betekenis geven aan oneindige sommen. Daarbij willen we dat elke methode op zijn minst aan bovenstaande drie eisen voldoet.

SOMMEERBARE RIJEN De eerste manier is onomstreden: dit is de methode die ook op de middelbare school wordt gebruikt. Het idee is dat je aan de sommen van de beginstukken van $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ moet kunnen zien wat de uitkomst is. De methode is als volgt.

- Maak een nieuwe rij getallen: voor elke n is s_n de som van het beginstuk van de rij tot en met a_n, dus $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
- Bekijk of de limiet $\lim_{n\to\infty} s_n$ van die nieuwe rij bestaat.

- Zo ja, dan is de waarde van $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ gelijk aan de limiet $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.
- Zo nee, dan heeft $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ *geen* waarde.

Een rij waaraan op deze manier een som is toe te kennen heet *sommeerbaar*. Bijvoorbeeld, als $a_n = 2^{-n}$, dan is

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - 2^{-n}.$$

Er geldt $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$, dus

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Bij de rij 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... krijgen we als s_n telkens 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... Deze rij heeft geen limiet, dus 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + ⋯ is *niet* gedefinieerd.

Ga zelf na dat deze methode aan onze drie eisen voldoet.

GEMIDDELDEN De wiskunde is vol van rijen die 'eigenlijk' sommeerbaar zouden moeten zijn en waarvan de som 'eigenlijk' bekend is, maar waarvoor bovenstaande methode niet werkt. We krijgen een verfijning van de vorige methode als we naar de *gemiddelden* van de beginstukken s_n gaan kijken. Bepaal eerst voor elke n het gemiddelde

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

Ga vervolgens na of $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ bestaat. Zo ja, dan is $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ *per definitie* gelijk aan S, en zo niet, dan is de som niet gedefinieerd. In dit geval noemen we rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *gemiddeld sommeerbaar*.

Wat je nu met wat puzzelen kunt nagaan, is dat deze methode voor de sommeerbare rijen dezelfde som oplevert. Anders gezegd: een sommeerbare rij is ook gemiddeld sommeerbaar en de 'middelsom' is gelijk aan de som. Het is belangrijk om na te gaan dat nog steeds aan onze eisen voldaan is.

Voor de rij 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... ziet de rij S_n-en er als volgt uit: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots$ (bedenk zelf een formule). Deze rij heeft een limiet gelijk aan $\frac{1}{2}$. De 'middelingsmethode' kent aan deze rij dus de som $\frac{1}{2}$ toe. Dit komt in de video uit de lucht vallen.

Je kunt iets meer zeggen: elke methode die aan de eisen uit het begin voldoet, *moet* aan 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... de som $\frac{1}{2}$ toekennen. Als je a_0 weghaalt, houd je de oorspronkelijke rij over, maar met een minteken. De tweede en derde eis geven nu samen dat voor de som S moet gelden dat $-S = S - 1$. Hieruit volgt dat $S = \frac{1}{2}$.

In de video komt ook de som 1 − 2 + 3 − 4 + 5 − 6 + ⋯ voor. De s_n-en daarvan zijn: 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, ... en de gemiddelden S_n zijn 1, 0, $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{7}$, 0, ... Die rij heeft geen limiet, dus de middelingsmethode werkt niet voor deze som.

Overigens, voor elke methode die aan de drie eisen voldoet, ligt de som 1 − 2 + 3 − 4 + 5 − 6 + ⋯ wel vast. We noemen de som t, schrijven deze som twee keer onder elkaar op (de tweede keer met een extra beginterm 0) en tellen deze twee sommen bij elkaar op:

$$\begin{array}{r}
t = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots \\
\underline{t = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots} \\
2t = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots
\end{array}$$

We hadden al gezien dat $S = \frac{1}{2}$, dus $2t = \frac{1}{2}$, ofwel $t = \frac{1}{4}$. Maar: dit mag alleen *als* we een sommatiemethode hebben die de som 1 − 2 + 3 − 4 + 5 − 6 + ⋯ aankan, en die hebben we nog niet. Op dit punt blijft de video volledig in gebreke: deze methode geven ze niet.

MACHTREEKSEN We introduceren nu een variabele x met $|x| < 1$ en vervangen de som 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + ⋯ door de volgende:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

De rij van partiële sommen $s_n(x)$ is gelijk aan:

$$s_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

De limiet van de uitdrukking

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

bestaat, omdat $|x| < 1$. Als we in de laatste formule $x = 1$ invullen, komt er $\frac{1}{2}$ uit.

Als we de linkerformule voor de partiële sommen $s_n(x)$ differentiëren, krijgen we

$$t_n(x) = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (-1)^n\, nx^{n-1}$$

en als we de rechterformule voor voor $s_n(x)$ differentiëren, vinden we

$$t_n(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + (-1)^n \frac{(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1+x)^2}.$$

Deze twee formules zijn aan elkaar gelijk. Als je voor $|x| < 1$ de limiet voor $n \to \infty$ neemt, dan volgt:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

(We gaan er hier van uit dat het nemen van deze limiet geen problemen oplevert: er zit hier wiskundig nog heel wat achter verstopt!) Als we ten slotte $x = 1$ invullen, krijgen we

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \tfrac{1}{4},$$

zoals we van een goede sommatiemethode willen.

Deze voorbeelden illustreren onze derde methode: bekijk of de rij a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, ... voor elke x met $|x| < 1$ sommeerbaar is; noem de resulterende *somfunctie* dan $s(x)$ en probeer $\lim_{x\uparrow 1} s(x)$ te bepalen. Als die limiet bestaat, dan wordt dat de definitie van de som $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, en anders blijft de som ongedefinieerd.

Ook deze methode voldoet aan onze eisen, dus als we met deze sommatiemethode werken, zijn de eerdere manipulaties legaal. Rijen waarop deze methode toepasbaar is, worden wel *Abel-sommeerbaar* genoemd, naar de Noorse wiskundige Niels Henrik Abel, die bewees dat deze methode in het bijzonder voor sommeerbare rijen werkt.

In de video wordt de gewenste som met een beroep op onze drie eisen uit de waarde van t afgeleid. Als we deze som even u noemen en er t van aftrekken, dan volgt

$$\begin{array}{rl} u = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots \\ t = & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots \\ \hline u - t = & \quad\;\; 4 \quad + 8 \quad + 12 \quad + \cdots \end{array}$$

We zien dat $u - t = 4u$, en daaruit volgt $u = -\frac{1}{12}$. Dit is voor ons nog niet legaal, omdat alle methoden die we tot nu toe gebruikt hebben niet toepasbaar zijn op de som $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$.

KLOPT HET DAN TOCH NIET? OF WEL?

Er bestaat een sommatiemethode die alle drie de sommen aankan en die ook nog aan onze eisen voldoet; die leidt dus onverbiddelijk tot $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$ en $u = -\frac{1}{12}$. Echter, die methode vergt kennis van Riemann's *zeta-functie*, dat is de functie waarover de Riemann-hypothese, het beroemde miljoendollar-probleem, gaat. Je kunt hier meer over lezen in het boek *De Riemann-hypothese – een miljoenenprobleem* van Roland van der Veen en Jan van de Craats (Epsilon-reeks 69). Ons probleem staat op bladzijde 51.

Op de website van *Scientific American* schreef Evelyn Lamb een lezenswaardig artikel over de oneindige som $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots$ (zie http://goo.gl/jyR0r3). ■

> "Tot op heden is de theorie van oneindige reeksen erg slecht onderbouwd. Men past alle operaties toe op oneindige reeksen, alsof ze eindig zijn. Maar is dat wel toegestaan? Ik denk van niet. Waar is aangetoond dat je de afgeleide van een oneindige reeks verkrijgt door elke term afzonderlijk te differentiëren? Niets is makkelijker dan het geven van voorbeelden waarvoor dit niet geldt."
>
> Niels Henrik Abel (1802-1829)