In februari van dit jaar werd een speciaal geval van Erdős' discrepantievermoeden bewezen. Voor het immense rekenwerk werd een computer ingezet. Het computerbewijs is zó lang, dat het onmogelijk door een mens geverifieerd kan worden. Het bewijs is nog niet officieel gepubliceerd, maar is al voor iedereen beschikbaar op de databank van arXiv.org.

■ door Alex van den Brandhof en Klaas Pieter Hart

HET DISCREPANTIE-VERMOEDEN

Een van de bezigheden van wiskundigen is het bedenken van mooie vermoedens, om die vervolgens te bewijzen. Omdat de internationale contacten tussen wiskundigen vroeger niet zo goed waren als tegenwoordig – niet in de laatste plaats door het ontbreken van internet vroeger – gebeurde het nogal eens dat meerdere wiskundigen onafhankelijk van elkaar met hetzelfde bezig waren. Neem bijvoorbeeld Nikolai Chudakov: in 1956 poneerde deze Russische getaltheoreticus een vermoeden over zogenaamde ±1-rijtjes. Wat hij echter niet wist, was dat exact hetzelfde vermoeden al ruim twintig jaar eerder was geformuleerd door Paul Erdős.

Toch was het niet zo dat er voor Chudakov geen eer meer te behalen viel. Het vermoeden was in al die jaren namelijk nog niet bewezen. En het leveren van een bewijs is, veel meer nog dan het opstellen van een mooi vermoeden, de meest eervolle zaak voor een wiskundige. Het is Chudakov echter niet gelukt en ook voor anderen is het probleem kennelijk te hardnekkig, want, afgezien van enkele deelresultaten, is niemand erin geslaagd om met Erdős' vermoeden af te rekenen.

DISCREPANTIETHEORIE Het vermoeden van Erdős (en Chudakov) over ±1-rijtjes heeft zijn wortels in de *discrepantietheorie*. Het woord *discrepantie* is afgeleid van het Latijnse *discrepare* ('niet overeenstemmen') en betekent 'afwijking' of 'tegenstrijdigheid'.

Erdős' discrepantieprobleem gaat over patronen in een oneindige rij bestaande uit niets anders dan de getallen +1 en −1, bijvoorbeeld

$$-1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, +1,$$
$$-1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, \ldots \qquad (*)$$

Erdős deed nu het volgende. Kap de oneindige rij op een zeker moment af (zodat je een eindig beginstuk overhoudt) en bekijk binnen deze rij een aantal termen op gelijke afstand van elkaar. Bijvoorbeeld de tweede, vierde en zesde term, of de vijfde, tiende, vijftiende en twintigste term. Algemeen: als de eerste term van je deelrij de d-de term (x_d) van de originele rij is, dan gaat je deelrij zo verder: x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}, en zo verder, tot je niet verder wilt of niet verder kunt. Je mag dus niet x_4, x_6, x_8 als deelrij ne-

l	d	$S_{l,\,d}$
2	1	$\lvert x_1 + x_2 \rvert = 0$
2	2	$\lvert x_2 + x_4 \rvert = 0$
2	3	$\lvert x_3 + x_6 \rvert = 2$
2	4	$\lvert x_4 + x_8 \rvert = 0$
2	5	$\lvert x_5 + x_{10} \rvert = 0$
2	6	$\lvert x_6 + x_{12} \rvert = 0$
3	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 \rvert = 1$
3	2	$\lvert x_2 + x_4 + x_6 \rvert = 1$
3	3	$\lvert x_3 + x_6 + x_9 \rvert = 3$
3	4	$\lvert x_4 + x_8 + x_{12} \rvert = 1$
4	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rvert = 0$
4	2	$\lvert x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \rvert = 2$
4	3	$\lvert x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} \rvert = 2$
5	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rvert = 1$
5	2	$\lvert x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} \rvert = 1$
6	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rvert = 2$
6	2	$\lvert x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} \rvert = 0$
7	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rvert = 1$
8	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \rvert = 2$
9	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \rvert = 3$
10	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \rvert = 2$
11	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \rvert = 3$
12	1	$\lvert x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \rvert = 2$

men: de termen liggen weliswaar op gelijke afstand (namelijk 2) van elkaar, maar de eerste term had in dit geval x_2 moeten zijn. Tel nu alle termen van je deelrij bij elkaar op en neem de absolute waarde. Van de deelrij ter lengte l waarbij de termen afstand d van elkaar hebben, noemen we deze som $S_{l,\,d}$. De maximale waarde van $S_{l,\,d}$ heet de *discrepantie* van de oorspronkelijke (afgekapte) rij.

Neem bijvoorbeeld rij (∗) en kap hem af na de twaalfde term. Je houdt over:

$$-1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, -1. \quad (**)$$

Voor deelrijen van lengte 1 geldt uiteraard: $S_{1,\,d} = 1$ voor elke $d \in \{1, ..., 12\}$. Voor $l > 1$ zetten we de sommen $S_{l,\,d}$ in een tabel (zie hierboven).

De discrepantie van rij (∗∗) is de maximale waarde van $S_{l,\,d}$, 3 dus.

Erdős vermoedde dat het voor elke oneindige ±1-rij mogelijk is om een eindig beginstuk te kiezen met een discrepantie groter dan welk getal ook. De exacte formulering van het discrepantievermoeden luidt:

Discrepantievermoeden. Gegeven is een oneindige rij $x_1, x_2, x_3, ...$ waarvan de termen uit de verzameling $\{-1, +1\}$ komen. Dan geldt: voor elke C bestaan er natuurlijke getallen n en d zodanig dat $\lvert x_d + x_{2d} + x_{3d} + \cdots + x_{nd} \rvert > C$.

ELKE RIJ VAN LENGTE 12 HEEFT DISCREPANTIE GROTER DAN 1

We gaan aantonen dat elke ±1-rij van twaalf termen discrepantie 2 of meer heeft. Om te beginnen: als er een $i \in \{1, ..., 6\}$ is met $x_i = x_{2i}$, dan geldt $|x_i + x_{2i}| = 2$ en zijn we klaar. We hoeven dus alleen maar rijen te bekijken waarvoor geldt dat $x_i = -x_{2i}$ voor elke i.

Neem aan dat de eerste term gelijk is aan +1 (als $x_1 = -1$ is, verloopt het bewijs op dezelfde manier). Dan volgt meteen dat $x_2 = -1$, $x_4 = +1$ en $x_8 = -1$. Onze rij ziet er dus zo uit:

+1, −1, _, +1, _, _, _, −1, _, _, _, _.

Bekijk nu de derde term: als $x_3 = +1$, dan volgt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - 1 + 1 + 1 = 2,$$

waarmee we weer klaar zijn.

We gaan dus verder met het ongunstige geval dat $x_3 = -1$, en dus $x_6 = +1$ en $x_{12} = -1$. Onze rij wordt dus:

+1, −1, −1, +1, _, +1, _, −1, _, _, _, −1.

Als de vijfde term +1 is, dan volgt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 2,$$

en zijn we dus weer klaar.

We nemen weer het vervelende geval $x_5 = -1$ en dus $x_{10} = +1$:

+1, −1, −1, +1, −1, +1, _, −1, _, +1, _, −1.

Als de zevende term −1 is, is

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8| = |1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1| = |-2| = 2,$$

waarmee we opnieuw klaar zijn.

Het ongunstige geval $x_7 = +1$ moeten we nog bekijken:

+1, −1, −1, +1, −1, +1, +1, −1, _, +1, _, −1.

Als de negende term +1 is, is

$$x_1 + \cdots + x_{10} = 2.$$

Het geval $x_9 = -1$ blijft dus over:

+1, −1, −1, +1, −1, +1, +1, −1, −1, +1, _, −1.

We zijn nu echter klaar, ongeacht welke waarde x_{11} heeft, want

$$|x_3 + x_6 + x_9 + x_{12}| = |-1 + 1 - 1 - 1| = |-2| = 2.$$

We kunnen dus concluderen dat de discrepantie ten minste 2 is.

Erdős reserveerde een bedrag van 500 dollar voor de eerste die het probleem kon oplossen.

Overigens had de Nederlander Bartel van der Waerden in 1927 al bewezen dat elke oneindige ±1-rij een eindige deelrij heeft met $|x_k + x_{k+d} + x_{k+2d} + \cdots + x_{k+nd}| > C$ (voor zekere natuurlijke getallen k, d en n). Bij Van der Waerden liggen de termen van de deelrij op gelijke afstand (d) van elkaar, net als bij Erdős. Het verschil is dat de eerste term bij Van der Waerden vrij gekozen mag worden. Erdős eist dat de eerste term x_d is (met d de afstand tussen twee opvolgende termen).

HET GEVAL C = 1 Het is relatief eenvoudig om het discrepantievermoeden voor het speciale geval $C = 1$ te bewijzen. Als je een oneindige ±1-rij afkapt na elf termen, hoeft de discrepantie *niet* groter dan 1 te zijn. Dat blijkt uit het volgende voorbeeld:

+1, −1, −1, +1, −1, +1, +1, −1, −1, +1, +1.

Het is niet moeilijk om na te gaan dat $S_{l,\,d}$ voor alle l en d ten hoogste gelijk is aan 1. De discrepantie van deze rij is dus 1. Maar als je een oneindige ±1-rij afkapt na twaalf termen, is de discrepantie altijd ten minste 2. Om dat aan te tonen, is het natuurlijk niet genoeg om één voorbeeld te geven. Je moet zeker weten dat van alle ±1-rijen bestaande uit twaalf termen de discrepantie groter is dan 1. Er zijn $2^{12} = 4096$ van zulke rijtjes. Best veel, maar als je gemiddeld één rijtje per minuut checkt en elke avond een uurtje werkt, ben je in ruim twee maanden klaar. Een computer kan zo'n klus natuurlijk in seconden klaren.

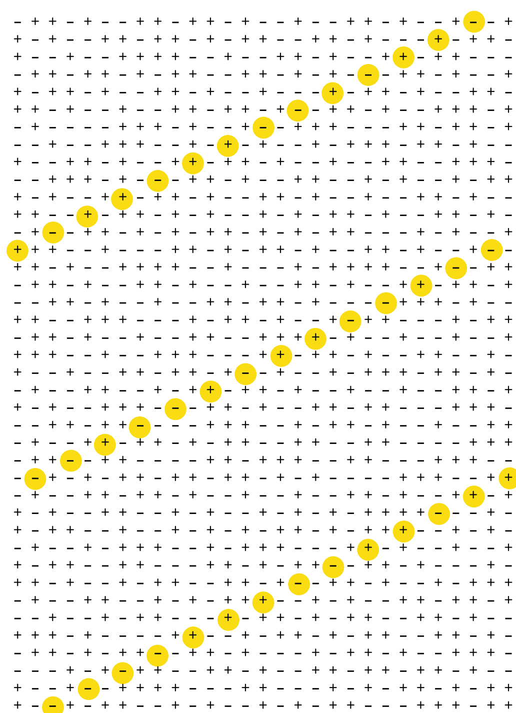
Er is echter ook een andere methode, gebruikmakend van een slim argument, om te bewijzen dat voor elke ±1-rij bestaande uit twaalf termen geldt dat de maximale waarde van $S_{l,\,d}$ ten minste 2 is. De Brit Adrian Mathias gaf zo'n bewijs voor het eerst, in 1993. Daarmee had hij het discrepantievermoeden bewezen voor het speciale geval $C = 1$. Hoe dit bewijs, zonder dat domweg alle 4096 mogelijkheden moeten worden nagegaan, eruitziet, kun je lezen in het kader op pagina 20.

POLYMATH: C = 2 In 2009 gebruikte wiskundige Timothy Gowers zijn blog om een nieuw experiment te doen: werken aan een wiskundig probleem waarbij iedereen zijn eigen steentje mag bijdragen. Net zoals het schrijven over een bepaald onderwerp op Wikipedia: iedereen die er verstand van heeft, mag het lemma aanvullen en verbeteren.

Het *Polymath Project*, zoals Gowers het noemde, had een specifiek doel: het bewijzen van een stelling. Maar er was nog een tweede, algemener doel: het doen van wiskundig onderzoek op een manier zoals dat nog nooit eerder gebeurde. Er werd een Polymath-blog gemaakt, die open stond voor iedereen. Overal ter wereld kon je de vorderingen volgen en, als je dat wou, zelf een bijdrage leveren: gedachten formuleren, ideeën toevoegen, of vragen stellen over andermans bijdragen. Het werd een succes: er kwamen zo'n 800 berichten van 27 personen, variërend van studenten tot hoogleraren. Na ruim een maand was het probleem opgelost.

In 2010 werd begonnen met een tweede Polymath Project. Gekozen werd voor de ±1-rijen van Erdős en Chudakov als onderwerp. Diverse deelresultaten werden geboekt, en in februari van dit jaar zetten Boris Konev en Alexei Lisitsa, beiden verbonden aan de universiteit van Liverpool, een artikel online waarin ze een bewijs van het discrepantievermoeden voor het geval $C = 2$ presenteren. Was het voor het geval $C = 1$ goed genoeg om een oneindige ±1-rij al na twaalf termen af te kappen, voor $C = 2$ ligt de grens bij niet minder dan 1161. Konev en Lisitsa lieten zien dat er een ±1-rij van 1160 termen bestaat met discrepantie 2, en dat de discrepantie van elke ±1-rij van lengte 1161 ten minste 3 is.

Een voorbeeld van een rij van lengte 1160 met discrepantie 2 is weergegeven in figuur 1 (in plaats van +1 en −1 wordt de rij kortweg met plusjes en



Figuur 1 Een ±1-rij van lengte 1160 met discrepantie 2. Als de rij wordt uitgebreid met een 1161ste term, gaat de discrepantie omhoog naar 3. Het doet er niet toe of die volgende term +1 of −1 is.

minnetjes aangegeven). De som van alle termen is 2, ofwel: $S_{1160,\,1} = 2$. Dus als de volgende term +1 is, is $S_{1161,\,1}$ gelijk aan 3. Met andere woorden: de discrepantie van de rij van lengte 1161 gaat dan 1 omhoog. Verder geldt dat de som van elke 27$^{\text{ste}}$ term (dat zijn de 42 met geel aangegeven termen) gelijk is aan −2, ofwel: $S_{42,\,27} = 2$. Omdat 1161 deelbaar is door 27 (er geldt: 1161/27 = 43), geldt dat als de 1161$^{\text{ste}}$ term −1 is, de waarde van $S_{1161,\,1}$ gelijk is aan 3. Dus ook in dit geval gaat de discrepantie van de rij van lengte 1161 met 1 omhoog. We kunnen nu concluderen dat de discrepantie niet 2 blijft, maar 3 wordt, ongeacht hoe de rij verder gaat. Om aan te tonen dat *alle* ±1-rijen van lengte 1161 een discrepantie van meer dan 2 hebben, is het ondoenlijk om alle 2^{1161} (dat is ongeveer $3{,}13 \times 10^{349}$) mogelijkheden na te gaan, zelfs met de hulp van een computer. Zou een computer een miljard rijtjes per seconde kunnen checken, dan zou hij hier bijna 10^{333} jaar mee bezig zijn, veel langer dan de leeftijd van het heelal!

Konev en Lisitsa zetten weliswaar de computer in, maar gebruikten een slimme truc. Ze vertaalden het probleem in zogeheten *Boolese operatoren* en gebruikten een *SAT-solver* om het probleem te kraken (zie het kader hiernaast). Het resultaat was een file van 13 gigabyte. Ter vergelijking: de hele Wikipedia beslaat zo'n 10 gigabyte. Het computerbewijs is daarmee veel te lang om door een mens gecontroleerd te kunnen worden.

Maakt dat uit? Dat is een filosofische vraag waarop wiskundigen geen eensluidend antwoord hebben. Gowers zegt erover: 'Persoonlijk ben ik relaxed over een enorm computerbewijs als dit. Het is denkbaar dat de auteurs ergens een fout maakten, maar dat geldt ook voor conventionele bewijzen.'

ALGEMEEN BEWIJS Gezien de moeilijkheid van het discrepantievermoeden is de prestatie van Konev en Lisitsa groots. Maar toch: in het licht van het oorspronkelijke vermoeden is het een druppel op een gloeiende plaat. Erdős vroeg immers naar een bewijs voor élke waarde van C; Konev en Lisitsa hebben 'slechts' een (voor sommigen omstreden) bewijs voor het geval $C = 2$ gegeven.

Het is niet ondenkbaar dat in de toekomst soortgelijke computerbewijzen worden gevonden voor grotere waarden van C. Maar voor hoeveel speciale gevallen er ook een bewijs wordt gevonden, er blijven altijd oneindig veel gevallen over. Een algemeen bewijs zal, naar alle waarschijnlijkheid, toch op menselijk vernuft aankomen. ■

WAT DOET EEN SAT-SOLVER?

In februari van dit jaar losten Boris Konev en Alexei Lisitsa het discrepantievermoeden op voor het speciale geval $C = 2$ met behulp van een *SAT-solver*. 'SAT' staat voor *satisfiable* (*vervulbaar*), een begrip uit de complexiteitstheorie. Hoe gingen zij te werk bij het zoeken van rijtjes met discrepantie 3 of meer? Het klinkt wat raar, maar dat deden ze juist niet! Ze gingen op zoek naar rijtjes met discrepantie 2 of minder. Die zoektocht leverde resultaat op bij lengte 1160 en leverde niets op bij lengte 1161.

Bij het zoeken maakten ze gebruik van *propositielogica*. In *Pythagoras* 43-3 (december 2003) en 43-4 (februari 2004) stonden twee artikelen over propositielogica: 'Logisch denken of rekenen' en 'Rekenen modulo 2 en goochelen met logica'. Beide Pythagorassen zijn als pdf te vinden in het archief op www.pyth.eu. Nuttig om te bekijken alvorens verder te lezen!

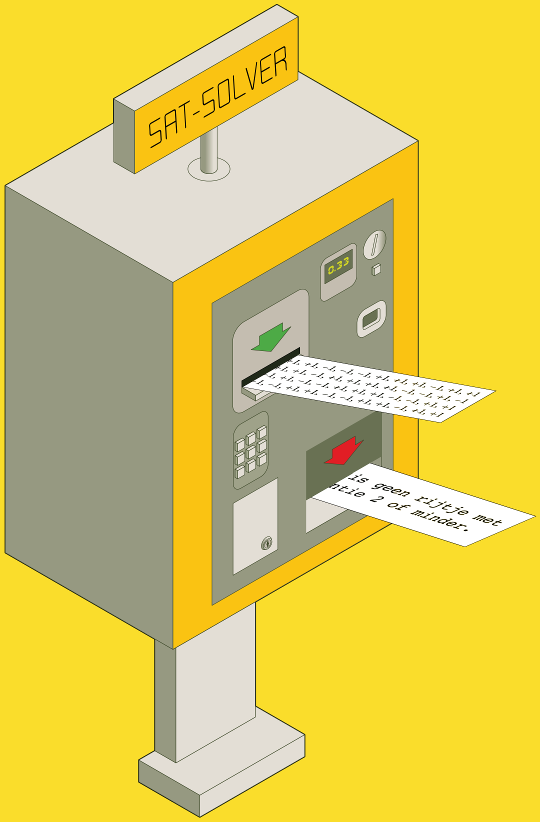
In plaats van, zoals je misschien zou denken, een heleboel optellingen te doen, lieten Konev en Lisitsa de computer een heleboel beweringen van het type 'als ... dan ...' nalopen. De reden is dat je een computer veel sneller met waarheidswaarden ('true' en 'false') kunt laten werken dan hem met getallen te laten rekenen. Zelfs zoiets eenvoudigs als 15 + 1 is binair nogal een gedoe: in het tweetallig stelsel schrijf je 15 als 1111 en als je daar 1 bij optelt wordt dat 10000. Daar worden dus vier bits omgezet van 1 naar 0 en verder moet er een nieuw bit vrijgemaakt worden om de nieuwe 1 op te slaan. Dat klinkt als weinig werk, maar als dit soort berekeningen 2^{1161} keer gedaan moet worden, is elke besparing op werken met bits welkom.

Om het idee van Konev en Lisitsa duidelijk te maken, kijken we naar rijtjes ter lengte 11 en 12. We weten immers dat tussen 11 en 12 de discrepantie omhoog gaat van 1 naar 2.

Zoals we gezien hebben, moeten we bij een rijtje van lengte 12 ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$) 23 deelrijtjes nalopen:

- zes van lengte twee: x_d, x_{2d}, voor $d = 1, ..., 6$;
- vier van lengte drie: x_d, x_{2d}, x_{3d}, voor $d = 1, ..., 4$;
- drie van lengte vier: $x_d, x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}$, voor $d = 1, 2, 3$;
- twee van lengte vijf: $x_d, x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}, x_{5d}$, voor $d = 1, 2$;
- twee van lengte zes: $x_d, x_{2d}, x_{3d}, x_{4d}, x_{5d}, x_{6d}$, voor $d = 1, 2$;
- voor de lengtes $l = 7, ..., 12$ elk één: $x_1, x_2, ..., x_l$.

Bij een rijtje van lengte 11 vallen er een paar af en sommige worden korter, maar we krijgen een bijna even grote hoeveelheid om langs te lopen. Bij 11 en



12 hebben we tegengestelde doelen: we willen laten zien dat er *wel* een rijtje ter lengte 11 met discrepantie 1 is, en we willen laten zien dat er *geen* rijtje ter lengte 12 met discrepantie 1 is.

In beide gevallen gaan we systematisch op zoek naar een rijtje met discrepantie 1 en aan het eind willen we dat de computer ons meldt 'hier is zo'n rijtje' (bij lengte 11), of 'er is niet zo'n rijtje' (bij lengte 12).

We bekijken hoe je een rijtje y_1, y_2, y_3, y_4 ter lengte 4 naloopt. Je voert *Boolese variabelen* in die alles gaan boekhouden. Om te beginnen introduceren we vier variabelen p_1, p_2, p_3 en p_4, waarin we de waarden van de y_i's opslaan: p_i is 'true' als $y_i = +1$ en p_i is 'false' als $y_i = -1$. Verder voeren we voor elke i de drie variabelen $s(i, -1)$, $s(i, 0)$ en $s(i, 1)$ in. Hiermee leggen we vast hoe groot $y_1 + \cdots + y_i$ is: $s(i, j)$ is 'true' dan en slechts dan als $y_1 + \cdots + y_i = j$.

Met behulp hiervan maken we logische formules en wel zó dat we die allemaal tegelijk 'true' kunnen maken precies dan als er een rij is met alle tussensommen gelijk aan -1, 0 of 1.

Voor elke i nemen we de volgende drie formules:
- $\varphi(i, -1)$ is $s(i, -1) \wedge \neg s(i, 0) \wedge \neg s(i, 1)$;
- $\varphi(i, 0)$ is $\neg s(i, -1) \wedge s(i, 0) \wedge \neg s(i, 1)$;
- $\varphi(i, 1)$ is $\neg s(i, -1) \wedge \neg s(i, 0) \wedge s(i, 1)$.

Die voegen we samen in één formule:

$$\Phi(i) = \varphi(i, -1) \vee \varphi(i, 0) \vee \varphi(i, 1).$$

Dan is $\Phi(i)$ 'true' precies dan als een van de drie variabelen $s(i, -1)$, $s(i, 0)$ en $s(i, 1)$ 'true' is. Hieruit volgt dat

$$\Phi(1) \wedge \Phi(2) \wedge \Phi(3) \wedge \Phi(4)$$

'true' is, precies dan als elke tussensom -1, 0 of 1 is.

Voor $i = 1$ moeten de volgende drie formules zeker 'true' zijn: $\neg s(1, 0)$ (want $y_1 \neq 0$), $s(1, 1) \Leftrightarrow p_1$ en $s(1, -1) \Leftrightarrow \neg p_1$.

Voor $i \geq 2$ maken we betrekkingen $\xi(i, j)$ en $\psi(i, j)$ tussen $s(i, j)$ en eerdere s-en en p_i:
- $\xi(i, j)$ is $s(i, j) \Leftrightarrow (s(i-1, j-1) \wedge p_i)$ voor $j \geq 0$;
- $\psi(i, j)$ is $s(i, j) \Leftrightarrow (s(i-1, j+1) \wedge \neg p_i)$ voor $j \leq 0$.

Wat je met wat vasthoudendheid kunt nagaan is het volgende: alle tussensommen zijn gelijk aan -1, 0 of 1 dan en slechts dan als de volgende formules allemaal waarheidswaarde 'true' hebben:
- $\Phi(1) \wedge \Phi(2) \wedge \Phi(3) \wedge \Phi(4)$;
- $\neg s(1, 0) \wedge (s(1, 1) \Leftrightarrow p_1) \wedge (s(1, -1) \Leftrightarrow \neg p_1)$;
- $\xi(i, j)$, $i \geq 2$, $j \geq 0$;
- $\psi(i, j)$, $i \geq 2$, $j \leq 0$.

Voor elk van de 23 deelrijtjes maken we zo'n verzameling formules, met voor elke deelrij telkens andere variabelen van de vorm $s(i, j)$, maar met één vaste rij variabelen p_i. Zo wordt p_2 bij elke rij ingezet waar x_2 in voorkomt.

Als we nu aan al die variabelen een waarde 'true' of 'false' kunnen geven zó dat alle formules voor alle rijtjes de waarde 'true' krijgen, dan geven de waarden van de p_i's ons een rij met discrepantie 1.

Je kunt de strategie van de SAT-solver terugzien in het bewijs op pagina 20: in feite probeert de SAT-solver het bewijs te laten mislukken. Wat wij ongunstig noemden, is voor de solver juist gunstig, omdat dan zoveel mogelijk formules 'true' worden gemaakt. De SAT-solver zal aan het eind, zodra x_3, x_6, x_9 en x_{12} vastliggen, moeten concluderen dat het niet lukt de discrepantie onder de 2 te houden.

Konev en Lisitsa hebben de formules uitgeschreven die bij zoektochten onder rijen van lengte 1160 en 1161 horen. Daar mag de som -2, -1, 0, 1 of 2 zijn, dus daar komen we telkens vijf s-en tegen: $s(i, -2)$, $s(i, -1)$, $s(i, 0)$, $s(i, 1)$ en $s(i, 2)$. De formules $\xi(i, j)$ en $\psi(i, j)$ blijven hetzelfde. Het resultaat was: bij 1160 is er een toekenning die alles 'true' maakte en die drukte de SAT-solver netjes af; bij 1161 is er niet zo'n toekenning en dus heeft elke rij van die lengte discrepantie 3.