Deze jaargang is 'kwadraten' een thema in *Pythagoras*. In deze tweede aflevering gaat het over een van de beroemdste ongelijkheden uit de wiskunde: die van de Fransman Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en de Duitser Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).

■ door Klaas Pieter Hart

DE ONGELIJKHEID VAN CAUCHY EN SCHWARZ

In het boek *Analyse Algébrique* van Augustin-Louis Cauchy uit 1821 staat een stelling die onder wiskundigen bijna net zo legendarisch is geworden als de stelling van Pythagoras. De stelling zoals die in 1821 werd geformuleerd zie je op pagina 25. De moderne formulering is als volgt.

Stelling. Laat $a_1, a_2, ..., a_n$ en $b_1, b_2, ..., b_n$ twee n-tallen reële getallen zijn. Dan geldt

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

en er geldt gelijkheid precies dan als alle verhoudingen a_i/b_i aan elkaar gelijk zijn.
Deze stelling staat bekend als de *Ongelijkheid van Cauchy*.

Het bewijs is eigenlijk heel eenvoudig en het gebruikt alleen maar dat kwadraten niet negatief zijn. We doen het voor tweetallen en we trekken het kwadraat van het linkerlid van het kwadraat van het rechterlid af:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 =$$
$$a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 =$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

(werk de vermenigvuldigingen maar uit). Dus

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2.$$

Uit de eerste gelijkheid volgt ook dat

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

precies dan als $a_1b_2 = a_2b_1$, dat wil zeggen als $a_1/b_1 = a_2/b_2$.

Opgave 1. Laat zien dat het verschil tussen $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ en $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ gelijk is aan $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2$. Bewijs vervolgens de stelling voor drietallen getallen.

EEN TOEPASSING In de wiskunde kom je veel problemen tegen die vragen naar een maximale of minimale functiewaarde onder een gegeven nevenvoorwaarde. Bijvoorbeeld: wat is de maximale waarde van $3x - 5y$ als gegeven is dat $x^2 + y^2 = 1$?

Dit probleem kunnen we nu snel oplossen.

16.e THÉORÈME. *Soient* $a, a', a'' \ldots, \alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ *deux suites de quantités, et supposons que chacune de ces suites renferme un nombre* n *de termes. Si les rapports*

$$\frac{a}{\alpha},\ \frac{a'}{\alpha'},\ \frac{a''}{\alpha''},\ \&c. \ldots$$

ne sont pas tous égaux entre eux, la somme

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots$$

sera inférieure au produit

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}.\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots)};$$

en sorte qu'on aura

$$(30)\left\{\begin{array}{l} \text{val. num. } (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots) \\ < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}.\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots)}. \end{array}\right.$$

De stelling van Cauchy zoals hij die zelf formuleerde in 1821, in het boek *Analyse Algébrique*.

Neem in Cauchy's ongelijkheid $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $b_1 = x$ en $b_2 = y$. Dan volgt

$$|3x - 5y| \leq \sqrt{3^2 + 5^2}\,\sqrt{x^2 + y^2}.$$

We bekijken paren (x, y) die aan $x^2 + y^2 = 1$ voldoen; voor die paren geldt dus altijd $|3x - 5y| \leq \sqrt{34}$ en de enige paren waar gelijkheid geldt, moeten voldoen aan $3y = -5x$, ofwel $y = -\frac{5}{3}x$. Als je dit invult in $x^2 + y^2 = 1$ krijg je $x^2 = \frac{9}{34}$ en $y^2 = \frac{25}{34}$. De eis dat $3y = -5x$ impliceert dat x en y tegengesteld teken moeten hebben, dus $(x, y) = (3/\sqrt{34}, -5/\sqrt{34})$ of $(x, y) = (-3/\sqrt{34}, 5/\sqrt{34})$. Voor het eerste paar geldt $3x - 5y = \sqrt{34}$ en voor het tweede paar geldt $3x - 5y = -\sqrt{34}$.

We hebben het gevraagde maximum dus gevonden, en het paar (x, y) waarvoor dat maximum wordt aangenomen.

EEN ANDERE ONGELIJKHEID

Door geschikte n-tallen te kiezen kun je verrassende andere ongelijkheden maken. Neem bijvoorbeeld alle b_i gelijk aan 1; dan krijg je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

voor elk n-tal reële getallen.

Je kunt dit resultaat gebuiken om de volgende mooie ongelijkheid voor drie positieve reële getallen x, y en z af te leiden:

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{x+z}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}} \leq \sqrt{6}.$$

Opgave 2. Laat x, y en z positief zijn. Bewijs dat

$$x + y + z \leq 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right).$$

SOMMEN VAN COSINUSSEN

Hier is een totaal andere toepassing van de ongelijkheid van Cauchy. Neem twee rijtjes getallen: $p_1, p_2, \ldots, p_k$ en $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. We nemen aan dat de p_i niet-negatief zijn en dat $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Bekijk de functie

$$f(x) = p_1 \cos \beta_1 x + p_2 \cos \beta_2 x + \cdots + p_k \cos \beta_k x.$$

Dan geldt

$$f^2(x) \le \tfrac{1}{2}(1 + f(2x)). \qquad (*)$$

Probeer dat voor het geval $k = 2$ maar eens te bewijzen, door alles uit te schrijven. Dat is lang niet eenvoudig, maar met onze ongelijkheid, en een slimme keuze van a_i en b_i, zijn we er zó. Neem maar $a_i = \sqrt{p_i}$ en $b_i = \sqrt{p_i} \cos \beta_i x$. Onze ongelijkheid geeft dan

$$f^2(x) \le \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \sum_{i=1}^{k} p_i \cos^2 \beta_i x.$$

Maar $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$ en een bekende gonioformule zegt $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$. Er staat dus eigenlijk

$$f^2(x) \le \sum_{i=1}^{k} p_i\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\beta_i x\right).$$

En dat is nu net de ongelijkheid in (*). Deze ongelijkheid heet de Harker-Kasper-ongelijkheid en is ontdekt bij onderzoek van kristallen. Om iets te kunnen zeggen over de verbindingen tussen atomen in materialen waren dit soort ongelijkheden belangrijk bij het schatten van parameters die veelal niet exact berekend konden worden.

WAT DEED SCHWARZ? De titel van dit stuk noemt twee namen, Cauchy en Schwarz, maar Schwarz is tot nu toe niet vermeld. Wat Hermann Amandus Schwarz heeft gedaan, is een ander bewijs van de ongelijkheid geven en laten zien dat de ongelijkheid in veel ruimere situaties geldt.

Schwarz' bewijs verliep als volgt. Hij voerde een variabele t in en maakte de volgende functie van t:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2.$$

Deze functie is nooit negatief en je kunt hem omschrijven tot

$$p(t) = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

een gewone tweedegraadsfunctie dus. Maar omdat $p(t) \ge 0$ voor alle t weten we uit de *abc*-formule dat de discriminant, $b^2 - 4ac$, kleiner dan of gelijk aan nul moet zijn. Voor deze functie betekent dat

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le 0$$

en dat is nu net de ongelijkheid van Cauchy.

Met dit idee kun je veel meer. Neem eens twee functies, f en g, bijvoorbeeld van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$. Dan geldt, net als hierboven, de volgende ongelijkheid:

$$\int_0^1 \left(t \cdot f(x) - g(x)\right)^2 \mathrm{d}x \ge 0.$$

Je kunt de linkerkant als volgt herschrijven:

$$t^2 \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2t \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Door weer naar de discriminant te kijken, krijgen we

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Deze ongelijkheid staat in een artikel van de Russische wiskundige Viktor Bunyakovsky uit 1859.

Met de ongelijkheid voor integralen is het leuk spelen; door geschikte intervallen en functies te nemen kun je allerlei handige afschattingen maken.

Kijk bijvoorbeeld eens naar

$$\int_0^1 x^{10} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$$

Deze integraal kun je door middel van partieel integreren exact uitrekenen:

$$\int_0^1 x^{10} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1334961 \cdot \mathrm{e} - 3628800,$$

maar die berekening, die veel tijd kost, zegt ons niet hoe groot de integraal ongeveer is. Met $f(x) = x^{10}$ en $g(x) = \mathrm{e}^x$ vinden we (met véél minder moeite):

$$\int_0^1 x^{10} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \le \sqrt{\int_0^1 x^{20} \mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1}{21}} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}} < \frac{2}{\sqrt{21}} < \frac{1}{2}.$$

Dat laatste volgt als je bedenkt dat e < 3 en dus $\frac{1}{2}(e^2 - 1) < 4$, en natuurlijk $\sqrt{21} > \sqrt{16} = 4$. Aan de andere kant: $x^{10}\,e^x \geq x^{10}$, dus volgt meteen dat

$$\int_0^1 x^{10} e^x \,dx > \int_0^1 x^{10}\,dx = \frac{1}{11}.$$

Opgave 3. Laat zien dat voor elke n geldt:

$$\frac{1}{n+1} < \int_0^1 x^n e^x \,dx < \frac{2}{\sqrt{2n+1}}.$$

Ongelijkheden als in opgave 3 komen uit een onderdeel van de analyse dat *asymptotiek* wordt genoemd; daar wil men vooral weten wat de *orde van grootte* van bepaalde uitdrukkingen is.

We geven nog een laatste voorbeeld. Neem $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $g(x) = 1/\sqrt{1+x}$ en gebruik de ongelijkheid met een variabel interval:

$$\left(\int_0^t 1\,dx\right)^2 \leq \int_0^t (1+x)\,dx \cdot \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx$$

(immers $f(x) \cdot g(x) = 1$). Reken alles uit:

$$t^2 \leq (t + \tfrac{1}{2}t^2) \cdot \ln(1 + t),$$

ofwel

$$2t^2 \leq t(2 + t) \cdot \ln(1 + t).$$

Deel door $t(2 + t)$ en je vindt

$$\frac{2t}{2+t} \leq \ln(1+t).$$

Deze ongelijkheid is behoorlijk scherp; op het hele interval [0, 1] is het verschil maar een paar honderdsten: ln 2 is maar ietsje meer dan $\frac{2}{3}$. ■