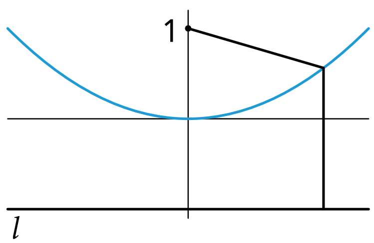
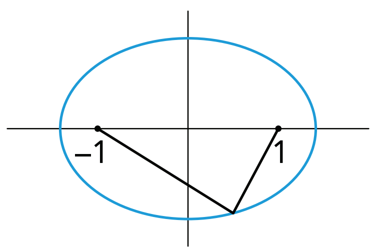
Ellipsen, parabolen en hyperbolen zijn allemaal speciale vormen van kegelsneden. We kunnen deze allemaal beschrijven door middel van kwadratische formules,bijvoorbeeld $x^2 + 2y^2 - 2xy - 3x - 4 = 0$. Kan je aan zo'n formule zien wat voor kegelsnede het is?

■ door Klaas Pieter Hart

KEGELSNEDEN BESCHRIJVEN



Figuur 1



Figuur 2

PARABOOL Een *parabool* bestaat uit de punten die gelijke afstand hebben tot een vast punt (het *brandpunt*) en een vaste lijn (de *richtlijn*). Neem bijvoorbeeld het punt $P(0, 1)$ en de lijn l met vergelijking $y = -1$. De afstand van een punt (x, y) tot P is gelijk aan

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

en de afstand tot l is $|y + 1|$. Als we die aan elkaar gelijk stellen krijgen we, na kwadrateren en wegstrepen, de vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2$. De bijbehorende grafiek zie je in figuur 1.

ELLIPS Een *ellips* bestaat uit de punten waarvoor de som van de afstanden tot twee vaste punten (de *brandpunten*) constant is. Neem bijvoorbeeld $F_1(-1, 0)$ en $F_2(1, 0)$. We bepalen de punten (x, y) met de eigenschap dat de som van de afstanden tot F_1 en F_1 gelijk is aan $2\sqrt{2}$, dus

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{2}.$$

Breng een wortel naar rechts, kwadrateer en streep zo veel mogelijk weg. Na vereenvoudigen komt er:

$$4x-8=-4\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

Deel 4 weg en kwadrateer nog een keer:

$$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2.$$

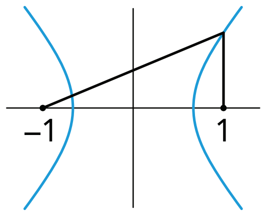
Dit geeft ons de volgende vergelijking voor de ellips:

$$x^2 + 2y^2 = 2.$$

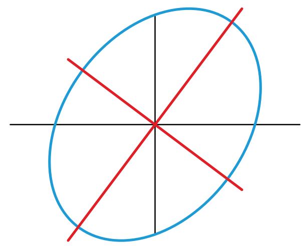
De grafiek van de ellips zie je in figuur 2.

HYPERBOOL Een *hyperbool* is op bijna dezelfde manier bepaald, alleen willen we dat het *verschil* tussen de afstanden constant is. Met de brandpunten als in het vorige voorbeeld en constant verschil $\frac{4}{3}$ krijgen we twee mogelijkheden:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\tfrac{4}{3} \qquad (1)$$



Figuur 3



Figuur 4

en

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\tfrac{4}{3}. \qquad (2)$$

Beide leiden op dezelfde manier als hierboven tot de vergelijking

$$45x^2 - 36y^2 = 20.$$

De grafiek van de hyperbool zie je in figuur 3. De rechterkromme hoort bij (1) en de linkerkromme bij (2).

KEGELSNEDEN RECHT ZETTEN Onze voorbeelden hebben eenvoudige vergelijkingen en je kunt aan de gedaante van de vergelijking zien waar je mee te maken hebt. De parabool heeft één term van de eerste graad en één van de tweede graad; de ellips heeft twee termen van de tweede graad die allebei een positieve coëfficiënt hebben en bij de hyperbool hebben de tweedegraadstermen coëfficiënten met tegengesteld teken.

Maar wat doen we als we een vergelijking als deze voorgeschoteld krijgen:

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 50\ ?$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking en de bijbehorende kromme is een kegelsnede, maar de vraag is natuurlijk van welk type. Het idee is op zoek te gaan naar de symmetrieassen van de figuur. In onze eerdere ellips en hyperbool zijn dat gewoon de x- en y-as. In figuur 4 zijn dat de rode lijnen. Die lijnen vormen een alternatief assenkruis en ze worden bepaald door twee richtingsvectoren: (a, b) en $(-b, a)$. We gaan ervan uit dat die vectoren lengte 1 hebben, dus $a^2 + b^2 = 1$.

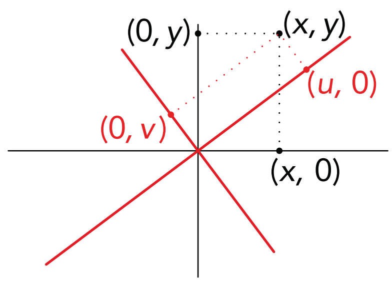
In figuur 5 zien we een punt (x, y) met twee paar coördinaten: de gewone, ten opzichte van x- en y-as, en de andere, ten opzichte van de rode assen. Het punt $(u, 0)$ staat voor $u(a, b) + 0(-b, a)$ en $(0, v) = 0(a, b) + v(-b, a)$; de rode coördinaten van ons punt zijn dus (u, v) en dat betekent dat $(x, y) = u(a, b) + y(-b, a) = (au - bv, bu + av)$.

Als we nu $x = au - bv$ en $y = bu + av$ in de vergelijking invullen en alles netjes uitwerken, krijgen we

$$Au^2 + Buv + Cv^2 = 50$$

waarbij $A = 41a^2 + 24ab + 34b^2$, $B = 24a^2 - 14ab - 24b^2$ en $C = 41b^2 - 24ab + 34a^2$ (reken maar na). Als we willen dat de rode assen de symmetrieassen van onze figuur zijn, dan moeten we ervoor zorgen dat $B = 0$, ofwel

$$12a^2 + 7ab - 12b^2 = 0.$$



Figuur 5

Wat belangrijk is, is de verhouding a/b; als we die t noemen dan krijgen we een normale vergelijking:

$$12t^2 + 7t - 12 = 0.$$

De oplossingen zijn $t_1 = \frac{3}{4}$ en $t_2 = -\frac{3}{4}$. Met de voorwaarde $a^2 + b^2 = 1$ levert t_1 ons $a = \frac{3}{5}$ en $b = \frac{4}{5}$ (we mogen zelf het teken kiezen) en dan volgt dat $A = \frac{625}{25} = 25$ en $C = \frac{1250}{25} = 50$. In termen van de nieuwe coördinaten krijgen we dus de vergelijking $25u^2 + 50v^2 = 50$, ofwel

$$u^2 + 2v^2 = 2$$

en dat is precies de scheve ellips in figuur 4. Als we t_2 hadden gebruikt, zouden we op $2u^2 + v^2 = 2$ zijn uitgekomen en op hetzelfde plaatje; alleen de u- en v-as waren dan verwisseld.

Probeer zelf de symmetrieassen te vinden van de figuur die bij de vergelijking

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 = 50$$

hoort en maak ook een schets.

HERKENNEN Om snel te herkennen met wat voor kromme je te maken hebt, hoef je niet al het werk dat we hierboven hebben gedaan te doen. Kijk nog eens naar het voorbeeld

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 50.$$

Als je 41 buiten de haakjes haalt en een kwadraat afsplitst, krijg je

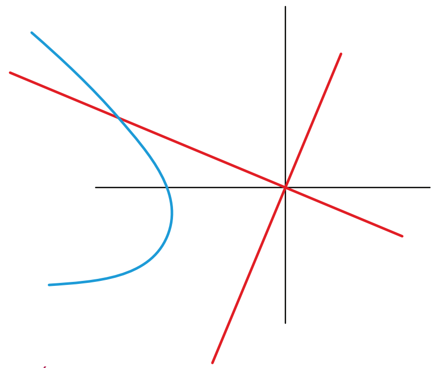
$$41\left(x - \frac{12}{41}y\right)^2 + \frac{1250}{41}y^2 = 50.$$

Hieraan kun je al zien dat we met een ellips te maken hebben, omdat de coëfficiënten van $(x - \frac{12}{41}y)^2$ en y^2 positief zijn.

Kun je zelf uitzoeken hoe de figuren van de vergelijkingen

$$x^2 - 4xy + 2y^2 = 10 \quad \text{en}$$
$$x^2 - 6xy + 9y^2 = 16$$

eruit zien?



Figuur 6

ALGEMENE VORM We hebben tot nu toe alleen vergelijkingen bekeken waarin alle termen van graad 2 zijn. In een vergelijking van een parabool verwachten we ook eerstegraadstermen. Een eerstegraadsterm kan ook betekenen dat het middelpunt van de kegelsnede niet de oorpsrong is. Met de methode van 'recht zetten' kunnen we ook inzien of we met een parabool te maken hebben.

Bekijk eerst eens

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 110x + 20y + 25 = 0.$$

We zagen dat als we $x = \frac{3}{5}u - \frac{4}{5}v$ en $y = \frac{4}{5}u + \frac{3}{5}v$ invullen, het gedeelte $41x^2 - 24xy + 34y^2$ verandert in $25u^2 + 50v^2$. Het eerstegraadsgedeelte verandert in $-50u + 100v$ en de hele vergelijking wordt dan

$$25u^2 + 50v^2 - 50u + 100v + 25 = 0,$$

ofwel

$$u^2 + 2v^2 - 2u + 4v + 1 = 0.$$

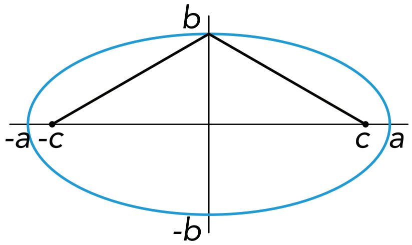
Hierin kunnen we kwadraten afsplitsen, waarna we de volgende vergelijking krijgen:

$$(u - 1)^2 + 2(v + 1)^2 = 2$$

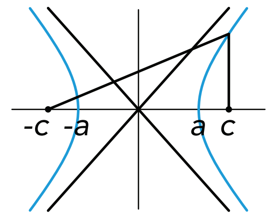
Het middelpunt is dus $(1, -1)$ in uv-coördinaten en in gewone coördinaten wordt dat $(\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$.

Een ander voorbeeld:

$$25x^2 + 120xy + 144y^2 + 26x - 377y + 338 = 0.$$



Figuur 7



Figuur 8

Als we, als tevoren, weer $x = au - bv$ en $y = bu + av$ invullen, krijgen we als gemengde term

$$2(60a^2 + 119ab - 60b^2)uv$$

en met wat proberen kun je dat ontbinden als

$$2(12a - 5b)(5a + 12b)uv.$$

We kiezen $a = \frac{5}{13}$ en $b = \frac{12}{13}$. Na invullen van $x = \frac{5}{13}u - \frac{12}{13}v$ en $y = \frac{12}{13}u + \frac{5}{13}v$ gaat de oorspronkelijke vergelijking over in

$$169u^2 - 338u - 169v + 338 = 0$$

ofwel

$$u^2 - 2u - v + 2 = 0.$$

Dit laatste kun je omwerken tot $v = 1 + (u - 1)^2$ en daar is dan weer makkelijk af te lezen dat het om een parabool gaat en waar de top van die parabool ligt (zie figuur 6).

Van ellipsen en hyperbolen, met middelpunt in de oorsprong, wordt de vergelijking meestal als volgt opgeschreven:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

voor de ellips en

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

voor de hyperbool. Die vormen komen bijna vanzelf tevoorschijn als je net als in het begin te werk gaat: neem eerst twee brandpunten $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$ en kies dan een constante a, met $a \geq c$.

Voor de ellips bekijk je alle punten waarvoor de afstanden tot F_1 en F_2 optellen tot $2a$ (dat maakt de formules aan het eind mooier):

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

(als $a < c$, dan voldoet geen enkel punt aan de eisen; waarom?). Als je netjes werkt, kom je uiteindelijk uit op

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Als we b zó nemen dat $b^2 = a^2 - c^2$ en als we ook nog delen door a^2b^2, dan krijgen we bovenstaande vergelijking. Uit de vergelijking van de ellips kun je meteen de snijpunten met de assen aflezen: $(\pm a, 0)$ en $(0, \pm b)$. In onze afleiding kwamen we uit op $a > b$ en dat is in figuur 7 te zien. Nu zie je ook waarom we $2a$ genomen hebben: a is de hypotenusa van de beide rechthoekige driehoeken.

De berekening voor de hyperbool gaat ook net als in het begin; alleen zorgen we nu dat $a \leq c$ en nemen we onderweg $b^2 = c^2 - a^2$. De hyperbool heeft maar twee snijpunten met de assen: $(\pm a, 0)$ (zie figuur 8). De brandpunten zijn weer $(\pm c, 0)$ en het constante verschil is ook nu $2a$: kijk maar naar de punten $(\pm a, 0)$. Het getal b is nu niet zo duidelijk in de figuur te zien, maar hij is er wel: in de asymptoten; die worden gegeven door $y = \pm \frac{b}{a}x$. ■