Het Engels en het Frans zijn triviale talen. Is het Nederlands dat ook?

Letterrekenen

K. P. Hart

In The Guardian van 29 oktober 2015 stond een aardig stuk waarin een artikel uit 1993 werd aangehaald. In dat artikel werd uitgelegd dat het Engels en het Frans triviale talen zijn. Nu zal iemand die net begonnen is een van die talen te leren zeggen dat ze helemaal niet triviaal zijn. Die trivialiteit heeft echter niets met de moeilijkheid van het leren te maken maar met iets totaal anders, namelijk met een tak van de Algebra die groepentheorie heet. Om uit te leggen wat talen en groepen met elkaar te maken hebben bekijken we een speciaal voorbeeld: de symmetriegroep van het vierkant. In dat voorbeeld zal ook duidelijk worden waarom we ons artikel *Letterrekenen* hebben genoemd.

Symmetrieën

Teken een vierkant en label de hoekpunten A, B, C, en D (tegen de klok in). Dat vierkant heeft allerlei symmetrieën: je kunt spiegelen in vier lijnen, je kunt roteren over veelvouden van 90° (ook over 0°, dan laat je alle punten gewoon liggen). Als we alleen positief (met de klok mee) roteren dan hebben we genoeg aan 0°, 90°, 180°, en 270°. In totaal zien we acht manieren om het vierkent zó te bewegen dat het weer op zichzelf terecht komt.

Die bewegingen kun je samenstellen; het resultaat is altijd weer een van de acht bewegingen en elke beweging heeft een inverse. Dit is wat 'groep' betekent: een aantal transformaties die je kunt samenstellen, met een transformatie die niets doet en waarin elke transformatie een inverse heeft.

In de Algebra probeert men groepen zo zuinig mogelijk te beschrijven. Een veelgebruikte manier is met letters en relaties waar die letters aan moeten voldoen.

De groep die bij het vierkant hoort kunnen we met twee letters beschrijven: S en R. Die letters staan voor een spiegeling en een rotatie: de spiegeling in de middelloodlijn van A en D (en dus ook van B en C) noemen we S, en de rotatie over 90° tegen de klok in noemen we R.

Door S en R achter elkaar uit te voeren kunnen we allerlei bewegingen van ons vierkant maken; omdat we de letters zien als transformaties lezen we die samenstellingen van rechts naar links, dus $RSSRRSSSRRRR$ staat voor: vier rotaties, dan drie spiegelingen, dan twee rotaties, dan twee spiegelingen en aan het eind nog een rotatie. Met behulp van deze rijtjes R-en en S-en, die we gewoon woorden noemen, kunnen we alle transformaties van het vierkant maken: Hierbij hebben we ook nog een symbool nodig voor de transformatie die niets doet: dat is eigenlijk het woord zonder letters maar om dat zichtbaar te maken noteren we dat als 1.

Opgave 1. Ga na dat we de transformaties van het vierkant als volgt kunnen beschrijven: 1, R, RR, RRR, S, SR, SRR, en $SRRR$.

Er zijn natuurlijk veel meer woorden dan de acht in de opgave; die geven allemaal transformaties van het vierkant. Elk woord hoort dus bij een van de acht korte woorden uit de opgave. Zo ook $RSSRRSSSRRRR$, welk woord dat is gaan we nu uitrekenen.

Hierbij gebruiken we wat eigenschappen van S en R. Ten eerste: $RRRR$ komt neer op draaien over 360°, dus op niets doen. We kunnen de vier R-en dus schrappen; dat maakt het rijtje wat korter: $RSSRRSSS$. Verder komt twee keer spiegelen ook neer op niets doen, dus twee S-en naast elkaar mogen we ook schrappen; dat maakt ons rijtje nog korter: $RRRS$.

Het effect van $RRRS$ bekijken we alle hoekpunten te volgen:

$A \to D \to A \to B \to C$,
$B \to C \to D \to A \to B$,
$C \to B \to C \to D \to A$, en
$D \to A \to B \to C \to D$.

Dat is de spiegeling in de lijn door B en D. Wie bovenstaande opgave heeft gemaakt weet dat we deze spiegeling ook als SR.

Dus $RRRS$ (één spiegeling gevolgd door drie rotaties) doet hetzelfde als Sr (één rotatie gevolgd door één spiegeling). Twee rijtjes letters die dezelfde transformatie opleveren noemen we *equivalent* en we behandelen de woorden als gelijk: we schrijven dus $RRRS = SR$.

Rekenen

Het feit dat twee keer spiegelen niets doet noteren we nu als $SS = 1$, en omdat $RRRR$ ook niets doen schrijven we ook $RRRR = 1$. We nu dus drie eigenschappen/relaties waar onze symbolen aan voldoen: $SS = 1$, $RRRR = 1$, en $RRRS = SR$. Het bijzondere is dat je met behulp van deze relaties elk woord terug kunt brengen tot één van de acht in de opgave hierboven.

Bijvoorbeeld RRS, die kunnen we ook schrijven als $RRRRRRS$ (vier R-en extra aan de linkerkant); zet nu even haakjes, $(RRR)(RRRS)$, en gebruik de derde relatie: $(RRR)(RRRS) = (RRR)(SR)$. Dit kan nog een keer: $(RRRS)R = (SR)R$. Conclusie: $RRS = SRR$.

Opgave 2. Laat zien dat $RS = SRRR$.

Opgave 3. Maak zelf een lang woord met R-en en S-en en gebruik de relaties om het terug te brengen tot een van de acht standaardwoorden.

Wat het bovenstaande laat zien is dat je de bestudering van de transformaties van het vierkant kunt vertalen naar het rekenen met letters; hiermee kun je de Algebra te hulp roepen in de meetkunde.

Opgave 4. Je kunt de transformaties van een regelmatige n-hoek met twee letters en drie relaties beschrijven. Zoek zelf uit hoe dat werkt.

Talen

Het artikel uit 1993 heeft in feite twee titels: *Quotients homophones des groupes libres* en *Homophonic quotients of free groups*. De schrijvers hebben, gedeeltelijk voor de grap, het idee van letterrekenen met relaties losgelaten op het hele alfabet, A tot en met Z, en de woorden die je daar mee kunt maken. De relaties die ze gebruikten hebben niets met meetkunde te maken maar met klanken; de titels van het artikel verwijzen naar homofonen, dat zijn woorden die hetzelfde klinken.

Als de uitspraak van twee woorden gelijk is dan noemen we die woorden equivalent. In het Nederlands zou je dus bijvoorbeeld zeggen dat $WORDT$ en $WORD$ equivalent zijn en $WORDT = WORD$ schrijven.

In het Engels klinken de woorden scent, cent en sent gelijk en dat geeft drie relaties $SCENT = CENT$, $SCENT = SENT$ en $SENT = CENT$.

In het Frans heb je onder meer $ALLER = ALLEZ$, $SOIE = SOI$, en $AU = AUX$ opschrijven.

Bij het rekenen mag je gelijke letters wegstrepen, maar alleen als ze aan dezelfde kant van het woord staan. Dus, als we zouden weten dat $NIET = GIET$ dat vinden we door wegstrepen dat $NIE = GIE$, $NI = GI$, en $N = G$, maar als we weten dat $TIEN = NIET$ kunnen we niets wegstrepen.

In het Engels kunnen we na wegstrepen concluderen dat $S = 1$ (uit $SCENT = CENT$), $C = S$ (uit $CENT = SENT$) en dus ook $C = 1$.

In het Frans vinden we dus $R = Z$, $E = 1$ en $X = 1$.

Het artikel uit 1993 is mooi in twee kolommen geschreven, de linkerkolom in het Frans, de rechterkolom in het Engels; en in elke kolom is te lezen dat de andere taal triviaal is en wel in de volgende betekenis. Er zijn in beide talen zoveel homofonen dat je heel veel relaties kunt opschrijven en met behulp daarvan bewijzen dat elke letter equivalent is met 1 (het lege woord dus). En daarmee is elk woord equivalent met het lege woord. En dat is wat in de wereld van het letterrekenen triviaal wordt genoemd.

OPGAVE 5. De grote vraag is nu: is het Nederlands ook triviaal? Ik ben er nog niet helemaal uit en het is veel leuker om zelf aan de slag te gaan. Hier is alvast een beginnetje: we hadden al $WORDT = WORD$, maar er geldt ook $WORD = WORT$ (wort is een tussenproduct dat bij bierbrouwen gevormd wordt). De conclusie is dus dat $D = T = 1$.

Het woordprobleem

Overigens zit achter dit letterrekenen een heel stuk niet-triviale wiskunde: in de meetkunde en kristallografie gaat het heel vaak om symmetrieën van allerlei objecten. Die kunnen net als bij het vierkant met een beperkt aantal letters weergegeven worden en het wordt vaak lastig om van twee woorden te zien of ze dezelfde transformatie bepalen.

Dit heeft "Het woordprobleem voor (half)groepen" en er is bewezen dat er geen universeel algoritme bestaat dat, gegeven een aantal relaties van alle woorden kan besluiten of ze equivalent zijn met het lege woord.

Via The Guardian `http://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/oct/2`
en `http://projecteuclid.org/euclid.em/1062620828`