Hoe kun je een rij getallen zo efficiënt mogelijk coderen? Met behulp van functies.

Genererende Functies

K. P. Hart

Je kunt rijen getallen op diverse manieren weergeven of definiëren. Je kunt de rij suggestief opschrijven

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

en hopen dat iedereen door heeft dat je $a_n = n$ bedoelt. De reden dat we bij $n = 0$ beginnen zal straks duidelijk worden.
Je kunt dus ook meteen een formule geven:

$$b_n = n!$$

Wat ook kan is de rij indirect specificeren, zoals de bekende rij van Fibonacci: die leg je vast door af te spreken dat $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, en $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 2$.
Je kunt er ook een opgave van maken: je hebt een heleboel (oneindig veel) 1- en 2-Euromunten. Bepaal voor elke n het aantal manieren, E_n, waarop je met die munten het bedrag van n Euro kun maken. Dus $E_0 = 1$: je kunt op één manier tot 0 Euro komen, door geen munten te nemen. Verder $E_1 = 1$ (één 1-Euromunt) en $E_2 = 2$ (één 2-Euromunt of twee 1-Euromunten). Wat is E_n?

Functies

We gaan het over nog een andere manier hebben, namelijk het verstoppen van een rij in een functie. Als voorbeeld nemen we de (flauwe) rij die gegeven is door $e_n = 1$ voor alle n. We schrijven daar de volgende uitdrukking bij op:

$$e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \cdots + e_nx^n + \cdots$$

die noteren we ook vaak als

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_nx^n$$

Daar staat dus een som van oneindig veel termen. Nu kunnen we vaak een betekenis aan zo'n oneindige som hechten en dat gaat als volgt. Schrijf de som van een beginstuk op en noem die $s_n(x)$, in ons voorbeeld wordt dat dus

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

In dit gevel kunnen we s_n vereenvoudigen.
Opgave 1. Reken na dat $(1 - x)s_n(x) = 1 - x^{n+1}$
We zien dat

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Als we nu aannemen dat $|x| < 1$ dan geldt $\lim_n x^{n+1} = 0$ en dus $\lim_n s_n(x) = \frac{1}{1-x}$. Dat vatten we samen als

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

We hebben de hele rij enen dus in de functie $e(x) = \frac{1}{1-x}$ verstopt.
Kunnen we de eerste rij ook in een functie verstoppen? Ja dat kan, kijk maar. We hebben

$$0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$$

Die kunnen we in deelsommen verdelen: eerst

$$0 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

dan houden we

$$x^2 + 2x^3 + \cdots + (n-1)x^n + \cdots$$

over en daar halen we

$$x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

uit weg. Je ziet de bui al hangen: voor elke $n \geq 1$ krijgen we zo een som:

$$S_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots$$

en die som is eigenlijk gewoon $x^n e(x)$ (haal x^n maar buiten de haakjes). Kortom we krijgen eigenlijk

$$e(x)(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)$$

Maar tussen de haakjes staat $S_1(x)$ weer en als we alles uitwerken vinden we dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

en dit geldt weer voor alle x met $|x| < 1$.
Kunnen we de faculteiten ook in een functie verstoppen? Nee, helaas niet; als je gaat proberen aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

een betekenis te geven dat kom je er al gauw achter dat de partiële sommen

$$s_n(x) = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots + n!x^n$$

voor elke $x \neq 0$ *niet* naar een vaste waarde convergeren: als $x > 0$ groeien ze boven elk getal uit en als $x < 0$ gaan ze heel wild oscilleren.

Om misschien toch wel: we kunnen de rij $\langle \frac{1}{n!} \rangle_n$ namelijk verstoppen in e^x, want voor alle reële getallen geldt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

en dan hebben we eigenlijk, stiekum, de faculteiten zelf ook meegenomen. *Bewijzen* dat e^x zo te schrijven is kost wat moeite, misschien doen we dat later nog eens.

Fibonacci

We gaan eerst laten zien dat je met behulp van functies ook formules voor rijen kunt opsporen. We nemen als voorbeeld de rij van Fibonacci. Eigenlijk kunnen we aan de definitie niet zoveel afzien; hoe snel groeien de getallen F_n eigenlijk? Dat gaan we met behulp van de bijbehorende functie uitzoeken. We doen even alsof

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

goed gedefinieerd is en gaan er mee spelen. We zetten de eerste twee termen apart:

$$F(x) = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n$$

en we gebruiken de regel $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 2$:

$$F(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n$$

nu splitsen we de som in twee sommen:

$$F(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

De laatste som is eigenlijk $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2}$ (goed kijken) en dat is $x^2 F(x)$.
De eerste som is $\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1}$ en dat is $xF(x)$ want $F_0 = 0$.

Kortom, we vinden dat

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x)$$

ofwel

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Wat kunnen we hier mee? Om dat te zien moeten we er even aan rekenen.

Ten eerste: we hebben de oplossingen van $1 - x - x^2 = 0$ nodig, dat zijn $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $\beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ — we geven ze een naam omdat we ze vaak gaan gebruiken. We kunnen de functie $F(x)$ nu ook zo schrijven:

$$F(x) = \frac{-x}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

(let op het minteken). We schrijven de breuk als som van twee eenvoudigere breuken:

$$\frac{-x}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{a}{\alpha - x} + \frac{b}{\beta - x}$$

als we de rechterkant onder één noemer brengen komt er

$$\frac{-x}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{a(\beta - x) + b(\alpha - x)}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

Nu moet dus gelden dat $-x = a(\beta - x) + b(\alpha - x)$ voor *alle* $x \neq \alpha, \beta$, maar omdat het om uitdrukkingen van de eerste graad gaat achteraf ook voor α en β zelf. Vul α maar in, je vindt $-\alpha = a(\beta - \alpha)$, en β invullen geeft $-\beta = b(\alpha - \beta)$. Conclusie: $a = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$ en $b = \frac{-\beta}{\alpha - \beta}$.

Dat vullen we netjes in, waarbij we $\frac{1}{\alpha - \beta}$ buiten de haakjes halen:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha}{\alpha - x} - \frac{\beta}{\beta - x}\right)$$

Nu komt het: neem de eerste term en deel teller en noemer door α, je krijgt

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}}$$

en met wat we in het begin gezien hebben maken we daar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$$

van; dit geldt als $|\frac{x}{\alpha}| < 1$, dus als $|x| < |\alpha|$. Evenzo vinden we

$$\frac{\beta}{\beta - x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n$$

als $|x| < |\beta|$. Nu geldt $x^2 + x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$, dus $\alpha\beta = -1$, hiermee kunnen we de formules een beetje opknappen door $\frac{x}{\alpha}$ vervangen door $-\beta x$ en $\frac{x}{\beta}$ door $-\alpha x$. En als we ook nog meenemen dat $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ dan krijgen we

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\beta x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha x)^n\right)$$

Voor de laatste opknapbeurt schrijven we $\phi = -\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, dan geldt $-\alpha = \beta^{-1} = (-\phi)^{-1}$. Conclusie:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \big(\phi^n - (-\phi)^{-n}\big)x^n$$

deze formule geldt voor alle x met $|x| < |\phi^{-1}|$. Hiermee hebben we een expliciete formule voor de F_n gevonden:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\phi^n - (-\phi)^{-n}\big)$$

Kennelijk geeft de formule voor elke n een natuurlijk getal. Ook kunnen we hier goed

zien hoe snel de F_n groeien: omdat $\phi > 1 > \phi^{-1} > 0$ convergeren de machten $(-\phi)^{-n}$ naar 0 en is F_n ongeveer gelijk aan $\phi^n/\sqrt{5}$. Je hebt $\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ vast wel herkend als de gulden snede; we hebben nu het bekende feit herontdekt dat F_{n+1}/F_n naar ϕ convergeert.
Overigens moeten we eigenlijk verifiëren dat onze formule voor F_n echt klopt: dat kun je doen door eerst $n = 0$ en $n = 1$ in te vullen en daarna te controleren dat de formule ook aan de betrekking voor de F_n voldoet.

Euro's

Hoe zit het met de Euro's? Kunnen we een formule voor de getallen E_n maken? Ja dat kan en wel als volgt.
Hiertoe lossen we eerst een tussenprobleem op. Stel dat je twee van elk hebt. Wat kun je dan maken en hoe vaak? Dat kun je aflezen uit het product $(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)$, kijk maar: dat product is gelijk aan

$$1 + 1x + 2x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 1x^5 + 1x^6 \qquad (*)$$

De $2x^2$ is tot stand gekomen door $1 \cdot x^2$ en $x^2 \cdot 1$ bij elkaar op te tellen; die $1 \cdot x^2$ lezen we als "0 munten van 1 Euro en 1 munt van 2 Euro" want de *macht* van x in de eerste factor geeft het aantal 1-Euromunten en de *macht* van x^2 het aantal 2-Euromunten. De term $x^2 \cdot 1$ staat dus voor "2 munten van 1 Euro en 0 munten van 2 Euro".
De $2x^4$ is de som van twee termen $1 \cdot x^4 = 1 \cdot (x^2)^2$ (twee 2-Euromunten) en $x^2 \cdot x^2$ (twee 1-Euromunten en één 2-Euromunt).
In $(*)$ kun je dus aflezen dat je alle bedragen van 0 tot en met 6 Euro kunt maken en hoe vaak: neem het getal bij de desbetreffende macht van x.

Opgave 2. Werk $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)$ uit om te zien wat je met drie 1-Euromunten en vier 2-Euromunten kunt maken, en hoe vaak.
Nu naar ons algemene probleem. Omdat we oneindig veel van beide muntsoorten hebben nemen we het product van $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$; het resultaat is dan $\sum_{n=0}^{\infty} E_n x^n$. Als $|x| < 1$ zijn de sommen gelijk aan $\frac{1}{1-x}$ en $\frac{1}{1-x^2}$ en het product is

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

of ook

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$$

Net als bij de rij van Fibonacci kunnen we deze breuk als som van eenvoudige breuken schrijven; reken zorgvuldig na dat we er

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x}$$

van kunnen maken. We weten al dat $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *en dus* $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$.
De eerste term kunnen we met behulp van de functie voor $a_n = n$ uitwerken:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}$$

en dat is nu net

$$\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

en dat wordt dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Nu vegen we alles bij elkaar in één grote som, de Euro-functie $E(x)$ is dus gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{4}\big(1 + (-1)^n\big) \right) x^n$$

En daar staat een mooie formule voor de getallen E_n:

$$E_n = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^n\right)$$

OPGAVE 3. Stel dat de *volgorde* waarin je de munten neerlegt van belang is, dus, bijvoorbeeld, 3 Euro neerleggen kan dan op drie manieren: $1+1+1$, $1+2$ en $2+1$. Op hoeveel manieren kun je dan n Euro neerleggen? Aanwijzing: als je $(x+x^2)^3$ uitschrijft kun je zien wat je kunt maken, en hoe vaak, als je precies drie munten mag neerleggen.

Genererende functies

Wat we hierboven gedaan hebben is een rij getallen aan een functie koppelen. De rij enen aan $\frac{1}{1-x}$, de rij gegeven door $a_n = n$ aan $\frac{x}{(1-x)^2}$, de rij $\langle \frac{1}{n!} \rangle_n$ aan e^x, de rij Fibonacci-getallen aan $\frac{-x}{1-x-x^2}$, en de rij Euro-getallen aan $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
De bijbehorende functie wordt de *genererende functie* van de rij genoemd omdat, zoals we hierboven gezien hebben, je soms die functie kunt maken zonder dat je de rij goed kent en dan achteraf uit de functie een formule voor je rij kunt maken.
Het is daarom handig als je van een paar standaardrijen de functies kent en van een paar standaardfuncties de rijen; dan kun je vaak je nieuwe rij in bekende uitdrukken.

Als je kunt differentëren en integreren dan kun je nog veel meer problemen oplossen. Zo is bijvoorbeeld $\frac{1}{(1-x)^2}$ de afgeleide van $\frac{1}{1-x}$ en dan kun je de som voor de eerste krijgen door de som voor de tweede te differentiëren:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

en dat is gelijk aan de som die we daarnet hadden gevonden (goed kijken).

Stelling van Taylor

En als je heel goed kunt differentëren kun je de getallen rechtstreeks uit de functie halen. Kijk maar, als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Dan vind je $f(0) = a_0$ door $x = 0$ in te vullen.
Na één keer differentiëren staat er

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

en dus $f'(0) = 1 \cdot a_1$.
Na twee keer differentiëren staat er

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-1}$$

en dus $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$.
En als je zo doorgaat vind je na k keer differentëren dat $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$, ofwel $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$.

Caveat Emptor. Als je het bovenstaande op e^x toepast krijg je, zoals verwacht, $a_k = \frac{1}{k!}$. Dat betekent niet automatisch dat

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Er zijn namelijk functies waarbij je door alle afgeleiden te bepalen een rij getallen kunt maken, maar waarbij de oneindige som niets met de gegeven functie te maken heeft.

Dat betekent dat je, nadat je die getallen hebt gevonden, nog wel moet nagaan dat de som bij de functie past. De Stelling van Taylor (zoek hem maar eens op) geeft voorwaarden waaronder het *wel* goed afloopt, en functies als e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{1+x}$ en nog veel meer voldoen aan die voorwaarden en zijn dus gelijk aan de bijbehorende oneindige sommen.
Zoek nu maar eens uit welke rijen getallen verstopt zitten in $\sin x$, $\cos x$ en $\sqrt{1+x}$.
OPGAVE 4. Probeer ook eens de rij te vinden die bij de functie $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ hoort.

Uitdaging Definieer $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ als $x = 0$ en $f(0) = 0$. Ga na dat f willekeurig vaak differentieerbaar is en dat $f^{(k)}(0) = 0$ voor *alle k*. Het lijkt dus of in deze functie de rij nullen zit verstopt. Echter, $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0$ voor alle x, en dat is niet wat we willen. ◢