**Als je vanuit Bunschoten naar de zendmast van Lopik kijkt, hoeveel van de mast is dan verborgen achter de horizon? Deze vraag werd door een Pythagoraslezer gesteld. In dit stuk geeft redacteur Klaas Pieter Hart het antwoord.**

■ door Klaas Pieter Hart

# ACHTER DE HORIZON

De afstand van Bunschoten naar de zendmast van Lopik is 60 kilometer. Om erachter te komen hoeveel van de mast achter de horizon is verborgen, maken we eerst een situatieschets (zie pagina 29). We gaan in meters werken (en geen kilometers), omdat die eenheid het best bij de gezochte hoogte past.

Stel dat jij het rode lijnstukje (rechts) in de schets bent. Je ogen bevinden zich op hoogte $o$. Het voor jou zichtbare deel van de zendmast is blauw getekend. Het deel dat achter de horizon is verdwenen, is groen in de schets. De lengte $h$ van dit groene lijnstuk willen we weten.

Verder is $R$ de straal van de aarde:

$$R = 40.000.000/(2\pi) \text{ meter.}$$

Ten slotte: de hoeken $\alpha$ en $\beta$ zijn samen gelijk aan $\gamma = 60.000/R$ radialen. Uit het plaatje lezen we af dat

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+o}$$

en dus

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R}{R+o}\right).$$

Zitten je ogen op een hoogte van 1,72 meter, dan vul je die waarde in voor $o$, en voor $R$ neem je 40.000.000/(2π). Met een rekenmachientje is het nu een fluitje van een cent om $\alpha$ te vinden.

Verder blijkt uit de schets dat

$$\cos\beta = \frac{R}{R+h}.$$

Dit kunnen we als volgt herschrijven:

$$h = \frac{-R\cos\beta + R}{\cos\beta}.$$

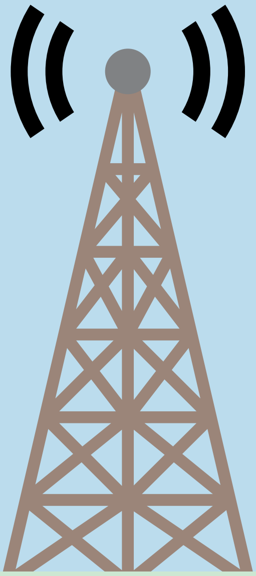
Omdat $\beta = \gamma - \alpha$, kun je $h$ nu makkelijk uitrekenen. (Voor $o$ = 1,72 meter vind je $h \approx 240$ meter.) Je kunt zelfs alles in één formule stoppen, al wordt die nogal ingewikkeld en zie je er weinig aan. Als je de grafiek van $h$ als functie van $o$ tekent, is die dan steil of vlak?

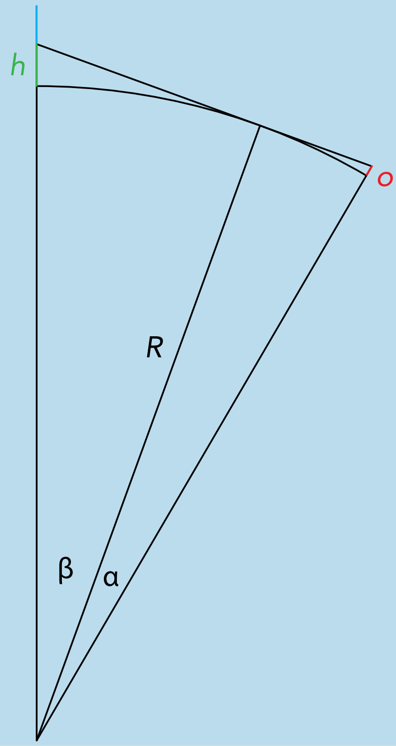
**ANDERS** Met behulp van benaderingen van de cosinus kun je de berekening ook anders doen. We gebruiken dat

$$\cos x \approx 1 - \tfrac{1}{2}x^2$$

als $x$ dicht bij 0 ligt. Daarnaast herschrijven we de breuken als respectievelijk

$$\frac{1}{1+\frac{o}{R}} \quad \text{en} \quad \frac{1}{1+\frac{h}{R}}$$






en gebruiken dat $1/(1 + x) \approx 1 - x$ voor $x$ dicht bij 0. Omdat $o/R$ en $h/R$ zeker dicht genoeg bij 0 liggen, krijgen we $1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \approx 1 - o/R$, ofwel

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{2o}{R}}$$

en evenzo

$$\beta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Nu nemen we alles samen:

$$\sqrt{\frac{2o}{R}} + \sqrt{\frac{2h}{R}} \approx \gamma$$

ofwel

$$\sqrt{2h} \approx \gamma\sqrt{R} - \sqrt{2o}.$$

Na kwadrateren en delen door 2 krijgen we

$$h \approx \tfrac{1}{2}(\gamma\sqrt{R} - \sqrt{2o})^2.$$

Ga zelf na dat $\gamma\sqrt{R} = 6\sqrt{5\pi}$. Daarmee krijgen we de volgende overzichtelijke benadering van $h$:

$$h \approx \tfrac{1}{2}(6\sqrt{5\pi} - \sqrt{2o})^2.$$

Hier wordt iets duidelijker hoe $h$ van $o$ afhangt, en de berekeningen zijn wat eenvoudiger. Met een ooghoogte van 1,72 meter komen we zo – opnieuw – uit op $h \approx 240$ meter.

## OPDRACHTEN

**1.** Bereken de waarde van $h$ voor je eigen ooghoogte $o$.
**2.** In oude nummers van *Pythagoras* (beschikbaar op www.pyth.eu) kun je opzoeken waar de benadering $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ vandaan komt: april 2001 en september 2004. Ben je het ermee eens dat we die benaderingen hebben gebruikt?
**3.** Wat vind je van de benadering $1/(1 + x) \approx 1 - x$? Reken het verschil $1/(1 + x) - (1 - x)$ maar eens uit en onderzoek hoe groot dat is, vergeleken met de echte en benaderde waarden.
**4.** De formule/benadering voor α kun je ook gebruiken om te bepalen hoe ver de horizon is als je van het strand over zee kijkt. Hoe ver is dat voor jou?
**5.** Onderzoek hoe $h$ van de afstand tussen de mast en de persoon afhangt. De 60 km was waarschijnlijk al afgerond. Wat is $h$ bij 55 km? En bij 65 km? ■