NIVEAU ○○○

ARCHIMEDES: DE ZANDREKENAAR

Kun jij zeggen hoeveel zandkorrels er in het heelal passen? Archimedes kon dat: hij kon het aantal korrels schatten en hij kon dat aantal ook uitdrukken. In dit eerste artikel uit een reeks gaan we in op het systeem van Archimedes om grote getallen te benoemen.

door **Klaas Pieter Hart**

Als we elkaar vertellen hoeveel liedjes er in onze telefoons zitten of wat de temperatuur van de dag is dan doen we dat in woorden. We zeggen niet: "Het is vandaag twee-vijf graden", maar "Het is vandaag vijfentwintig graden". We kunnen heel grote getallen in woorden uitdrukken door aan woorden voor kleinere getallen woorden voor machten van 10 te plakken: -honderd, -duizend, miljoen, miljard, biljoen, enzovoort (vanaf duizend gaat de exponent bij elk nieuw woord met 3 omhoog).

OPGAVE 1

Probeer dit getal maar eens uit te spreken: 123.456.789.987.654.321.

Onze manier van uitspreken is grotendeels gebaseerd op het tientallig stelsel, met een beetje twaalftallig; dat kun je zien aan de woorden voor 11, 12, 13, 14, …: elf, twaalf, dertien, veertien, …, vanaf dertien is er regelmaat met telkens -tien aan het eind. Niet alle stelsels om getallen weer te geven zijn even handig. De Romeinse schrijfwijze staat wel deftig op gevels van gebouwen maar je kunt er heel slecht mee rekenen, en echt grote getallen kun je alleen met kunstgrepen weergeven.

ZANDKORRELS

In zijn tijd dacht Archimedes ook na over manieren om getallen weer te geven; dat is bijvoorbeeld te zien aan een manuscript dat *De Zandrekenaar* heet. Dat is een brief aan Koning Gelo van Syracuse waarin hij uitlegt hoe je kunt overschatten hoeveel korrels zand er in het heelal passen en hoe je die overschatting kunt benoemen/uitspreken.
In het begin schrijft Archimedes dat sommige mensen denken dat er oneindig veel korrels zand zijn "niet alleen rond Syracuse en elders op Sicilië, maar overal". Ook zijn er mensen die denken dat er (slechts) eindig veel korrels zijn maar dat er geen getal benoemd is dat groter is dan dat aantal.
Maar, vervolgt Archimedes, ik zal proberen te laten zien dat sommige getallen die ik in een eerder werk heb benoemd niet alleen groter zijn dat het aantal zandkorrels dat in de aarde past, maar zelfs groter dan het aantal dat in het hele heelal zou passen.
In dit artikel zullen we zien hoe Archimedes een systeem bedacht om grote getallen weer te geven. In een volgend stuk zullen we zien hoe een overschatting van het aan-

tal zandkorrels in het heelal in dat systeem uit te drukken is.

GRIEKSE GETALLEN

De Grieken hadden niet het mooie decimale systeem dat wij nu hebben. Ze hadden een soort tientallig systeem, maar met groepjes van negen cijfers, weergegeven door letters met accentjes.

Eerst α', β', γ', δ', ε', ς', ζ', η', en θ'; die staan voor achtereenvolgens 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, en 9.

Dan ι', κ', λ', μ', ν', ξ', o', π' en ϟ′; die staan voor de tientallen: 10 tot en met 90.

Ten slotte staan ρ', σ', τ', υ', ϕ', χ', ψ', ω' en ϡ′ voor de honderdtallen 100 tot en met 900.

Getallen schrijf je dan gewoon op, net als wij, van links naar rechts, zonder nullen dus. Bijvoorbeeld $\kappa\varepsilon'$ is 25, $\sigma\varepsilon'$ is 205, $\sigma\nu'$ is 250.

Duizendtallen werden weergegeven met de eerste negen letters, maar met een extra tekentje ervoor onder de schrijflijn: $,\alpha'$, $,\beta'$, $,\gamma'$, $,\delta'$, $,\varepsilon'$, $,\varsigma'$, $,\zeta'$, $,\eta'$, en $,\theta'$.

OPGAVE 2

Bedenk zelf eens hoe 2500, 2050 en 2005 opgeschreven moeten worden.

De Grieken konden dus getallen tot en met 9999 opschrijven, maar ze gingen nog verder: 10.000 noemden ze een *myriade* en die noteerden ze met een *M*. Door die weer met de reeds bekende getallen te combineren konden ze tot een myriade van myriaden komen, tot 10.000^2 = 100.000.000 dus. Dat combineren ging als volgt: 123.456 verdeel je in 12 myriaden en 3456; die 3456 wordt dan $,\gamma\upsilon\nu\varsigma'$.

De 12 myriaden schrijven we als

$$\overset{\iota\beta}{M}$$

en 123.456 wordt dan

$$\overset{\iota\beta}{M}{,}\gamma\upsilon\nu\varsigma'$$

ORDES

Archimedes noemde de getallen tot een myriade myriaden (100.000.000 dus) *getallen van de eerste orde*. Het getal 100.000.000 is de eenheid van *de tweede orde* en de getallen van die eenheid tot $100.000.000^2$ zijn de *getallen van de tweede orde*. De *getallen van de derde orde* lopen dan van $100.000.000^2$ tot $100.000.000^3$. En zo kunnen we doorgaan tot we bij de getallen van orde 100.000.000 komen, die net voor $100.000.000^{100.000.000}$ eindigen.

Dergelijke getallen kun je, in principe, met de Griekse notatie beschrijven: een getal van de derde orde, bijvoorbeeld, door achtereenvolgens het aantal eenheden van de derde, van de tweede en van de eerste orde op te schrijven. Je moet dan wel de ordes expliciet noemen want er zouden wel eens geen eenheden van orde twee of één kunnen zijn. Dus bij 2.050.000.000.000.002.005 geef je geen eenheden van de tweede orde.

OPGAVE 3

Van welke orde is het getal 123.456.789.987.654.321 uit opgave 1? Schrijf het op in het systeem van Archimedes.

PERIODEN

Maar Archimedes was nog niet klaar. De getallen tot $P = 100.000.000^{100.000.000}$ noemde hij *getallen van de eerste periode*.

De *getallen van de tweede periode* beginnen bij P en die worden door telkens met 100.000.000 te vermenigvuldigen in ordes verdeeld. Dus van P tot $100.000.000P$, van $1000.000.000P$ tot $100.000.000^2P$, enzovoort tot P^2.

Op dezelfde manier maken we de getallen van de derde periode, van P^2 tot P^3, weer in een myriade myriaden ordes.

En zo gaan we door, tot en met de 100.000.000e orde in de 100.000.000e periode, tot aan $P^{100.000.000}$ dus.

Kortom, Archimedes had een schema bedacht om getallen tot

$$(100.000.000^{100.000.000})^{100.000.000}$$

uit te drukken.

OPGAVE 4

Hoeveel nullen heeft dat getal? Is het groter of kleiner dan een googol? Is het groter of kleiner dan een googolplex?

HOE PRAKTISCH IS HET

Is dit een praktisch systeem? Dat hangt er natuurlijk van af hoe goed je er mee kunt werken. Ik denk dat je met voldoende oefening net zo goed met het Griekse systeem kunt werken als met het onze.

Er zijn grote verschillen. Hierboven heb ik telkens onze decimale notatie gebruikt om getallen weer te geven; als ik de taal van Archimedes had gebruikt dan had ik het grote getal aan het eind als volgt uitgedrukt: "een myriade-myriade eenheden van de myriade-myriadeste orde uit de myriade-myriadeste periode".

Dat daar inderdaad $P^{100.000.000}$ staat kun je als volgt uitvlooien: je moet de *eenheid*, het beginpunt dus, van de myriade-myriadeste orde uit de myriade-myriadeste periode hebben. De myriade-myriadeste periode heeft $P^{99.999.999}$ als beginpunt; de getallen van de myriade-myriadeste orde in die periode beginnen dan bij

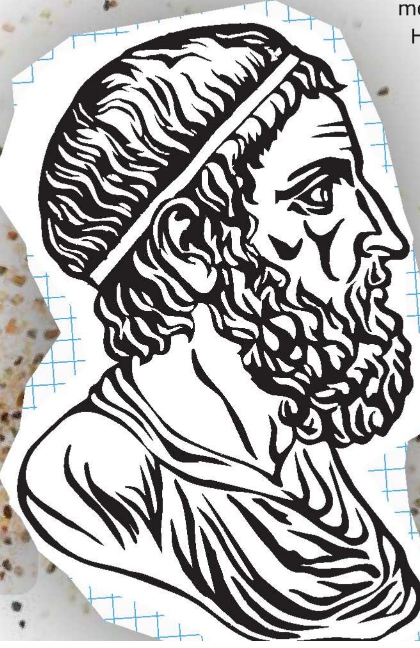
$A = 100.000.000^{99.999.999} \times P^{99.999.999}$.

Dat is dus de "eenheid van de myriade-myriadeste orde uit de myriade-myriadeste periode"; en daarvan moeten we er een myriade myriaden veel van nemen, vermenigvuldigen met 100.000.000 dus. Het resultaat $100.000.000 \times A$ is inderdaad gelijk aan $P^{100.000.000}$.

Je zou kunnen zeggen dat Archimedes een systeem met 99.999.999 cijfers had bedacht: elk getal van 1 tot en met 99.999.999 heeft in het Griekse systeem een 'cijfer' dat uit ten hoogste negen letters bestaat (inclusief de M). Dus

$$\overset{\iota\beta}{M},\gamma\upsilon\nu\varsigma'$$

stelt één zo'n 'cijfer' voor.



Als we een myriade myriaden even met $\mathbb{M}$ noteren dan verdelen de ordes de eerste periode in intervallen: $[1, \mathbb{M})$, $[\mathbb{M}, \mathbb{M}^2)$, $[\mathbb{M}^2, \mathbb{M}^3)$, …, $[\mathbb{M}^{\mathbb{M}-1}, \mathbb{M}^{\mathbb{M}})$; dus $P = \mathbb{M}^{\mathbb{M}}$. Een typisch getal van orde k (in het k-de interval dus) wordt met k 'cijfers' geschreven; voor de laatste orde zijn dat dus een myriade myriaden 'cijfers'.

De perioden geven ook een rij intervallen: $[1, P)$, $[P, P^2)$, $[P^2, P^3)$, …, $[P^{\mathbb{M}-1}, P^{\mathbb{M}})$.

OPGAVE 5

Hoeveel Griekse 'cijfers' heeft een typisch getal in de laatste orde van de laatste periode?

MODERNE TERMEN

Aan het begin van dit artikel hebben we de woorden duizend, miljoen, miljard, biljoen, biljard, … genoemd. Dat is het begin van een systeem waarin om en om 'joen' en 'jard' voorvoegsels krijgen en waarbij de exponent van 10 telkens met 3 wordt opgehoogd.

OPGAVE 6

Zoek uit wat achter dat systeem zit en waar het stopt: wat is de hoogste macht van 10 die zo weergegeven kan worden? In welke orde of periode van Archimedes blijven we steken?

OPGAVE 7

In het SI-systeem van eenheden worden ook voorvoegsels gebruikt om machten van 10 aan te geven: kilo-, mega-, giga-, tera-, … . Ook daar zitten grenzen aan; ga maar eens op zoek.

KIJK VOOR DE ANTWOORDEN OP PAGINA 41 <<