Het belang van $\leqslant$

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Lunteren, 14 Augustus, 2007

Overzicht

1. Vragen
   - Maximaliseren/minimaliseren
   - Gemiddelden
   - Twee rijen
2. Antwoorden
   - Maximaliseren/minimaliseren
   - Blokken
   - Een bewijs
   - Driehoeken
   - Gemiddelden
   - Rijen

Maximaliseren/minimaliseren

- Welke van alle rechthoeken met omtrek 100 heeft de grootste oppervlakte en waarom?
- Welke van alle rechthoeken met oppervlakte 100 heeft de kleinste omtrek en waarom?

Maximaliseren/minimaliseren

- Welke van alle rechthoekige blokken met oppervlakte 216 heeft het grootste volume en waarom?
- Welke van alle rechthoekige blokken met volume 216 heeft de kleinste oppervlakte en waarom?
- Welke van alle driehoeken met omtrek 30 heeft de grootste oppervlakte en waarom?

Gemiddelden

- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in serie geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?
- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in parallel geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?
- Je hebt een rechthoek van 2×3; wat is de gemiddelde lengte van de zijden?

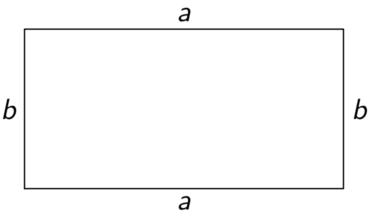
Delft University of Technology

Twee rijen

- Wat kun je zeggen over het gedrag van de getallenrij 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\ldots$, $\sqrt[n]{n}$, $\ldots$?
- Hoe zit het met 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{24}$, $\ldots$, $\sqrt[n]{n!}$, $\ldots$?

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

Neem een rechthoek met omtrek 100 en zijden a en b.



Dan geldt $a + b = 50$.
En $ab = \ldots$?
Beter: $ab \leqslant 625$ want ...

Vaste omtrek ($a + b + a + b = 100$)

... midden tussen a en b ligt 25

Dus: $a = 25 + x$ en $b = 25 - x$ en daarmee ...

Vaste omtrek $(a+b+a+b=100)$

... vinden we $ab = (25+x)(25-x) = 625 - x^2 \leqslant 625$

Conclusie 1: altijd geldt $ab \leqslant 625$

Conclusie 2: alléén als $a = b = 25$ geldt $ab = 625$

Dus: van alle rechthoeken met omtrek 100 heeft het vierkant van 25×25 de maximale oppervlakte.

Omtrek L

Bij omtrek L krijgen we niet 25 maar $\frac{1}{4}L$.
Dus voor de oppervlakte O geldt $O \leqslant \frac{1}{16}L^2$.
Dit is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor rechthoeken; gelijkheid geldt alléén voor vierkanten.

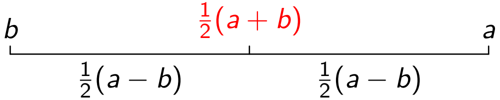
Iso = gelijk en perimeter = omtrek

Vaste oppervlakte $O = 100$

De Isoperimetrische Ongelijkheid, $O \leqslant \frac{1}{16}L^2$, beantwoordt meteen de tweede vraag.
Immers: $O = 100$, dus $L^2 \geqslant 1600$, of $L \geqslant 40$
met gelijkheid alléén voor een vierkant van 10×10.

Nog een ongelijkheid

Bekijk dit plaatje nog eens



Denk aan de 25 en de x.

$$a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \text{ en } b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$$

en dus . . .

Delft University of Technology

Nog een ongelijkheid

… kunnen we ab schrijven als verschil van kwadraten:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

en dus

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

en er geldt alléén gelijkheid als $a = b$

Delft University of Technology

Nog een ongelijkheid

We schrijven ook wel

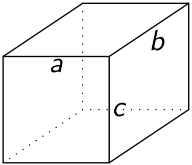
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

met gelijkheid alléén als $a = b$.
De *Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde*

Delft University of Technology

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Bekijk een blok met zijden a, b en c en oppervlakte 216.



Oppervlakte: $O = 2(ab + ac + bc)$
Volume: $V = abc$.
Is er een relatie tussen V en O?

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Net ale bij twee getallen hebben we voor drie getallen ook een ongelijkheid.
Voor drie positieve getallen p, q, en r geldt

$$\sqrt[3]{pqr} \leqslant \frac{p+q+r}{3}$$

met gelijkheid alléén als $p = q = r$.
Straks: een *bewijs*

Delft University of Technology

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

Vul in: $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$.
Er komt

$$\sqrt[3]{abacbc} \leqslant \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat

$$V^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{1}{6}O = 36$$

of

$$V \leqslant \left(\frac{1}{6}O\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36}^3 = 216$$

en ...

Vaste oppervlakte ($O = 216$)

... het enige blok met oppervlakte $O = 216$ waarvan het volume gelijk is aan 216 is het blok dat voldoet aan

$$ab = ac = bc$$

hieruit volgt heel snel dat $a = b = c$, dus bij vaste oppervlakte heeft de kubus maximaal volume

Delft University of Technology

Vast volume ($V = 216$)

De ongelijkheid geeft (net als bij rechthoeken) meteen een antwoord op de omgekeerde vraag.
Even opknappen

$$V^2 \leqslant \frac{1}{216} O^3$$

Dus: als $V = 216$ dan $216^3 \leqslant O^3$ met gelijkheid alléén als het een kubus is.

Delft University of Technology

Twee getallen

We weten: als $a, b \geqslant 0$ dan

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

met gelijkheid alléén als $a = b$.

Vier getallen

Neem $a, b, c, d \geqslant 0$ dan

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)$$

en

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right) = \frac{a+b+c+d}{4}$$

dus ...

TUDelft
Delft University of Technology

Vier getallen

. . . vinden we

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}$$

met gelijkheid alléén als $a = b = c = d$

Delft University of Technology

Drie getallen

Neem $a, b, c \geqslant 0$ en maak er een d bij: $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$
Vul in:

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{3d+d}{4} = d$$

of

$$abcd \leqslant d^4$$

en dus $abc \leqslant d^3$ ofwel $\sqrt[3]{abc} \leqslant d$ en hier staat

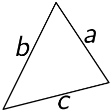
$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

met gelijkheid alléén als $a = b = c$

Delft University of Technology

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben een driehoek met zijden a, b en c en omtrek $L = 30$.



Formule van Heron voor de oppervlakte:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

met $s = \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Delft University of Technology

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben vier getallen, dus

$$\sqrt{O} = \sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqslant \frac{1}{4}(s+s-a+s-b+s-c)$$

conclusie

$$\sqrt{O} \leqslant \frac{1}{4}(4s-2s) = \frac{1}{4}L = 7\frac{1}{2}$$

met gelijkheid als $s = s-a = s-b = s-c$ dat wil zeggen als $a = b = c = 0 \ldots$?????

Vaste omtrek ($L = 30$)

We hebben *drie* variabele getallen, dus proberen we

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leqslant \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant s \times \frac{1}{27}s^3 = \frac{1}{27}s^4$$

met gelijkheid alléén als $s-a=s-b=s-c$.
Met worteltrekken ...

Delft University of Technology

Vaste omtrek ($L = 30$)

... komt er

$$O \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}} s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}} L^2 = \frac{900}{12\sqrt{3}}$$

Dus de oppervlakte is, bij omtrek 30, nooit groter dan $\frac{900}{12\sqrt{3}}$ en als alle zijden gelijk aan 10 zijn is de oppervlakte precies zo groot.
Bij vaste omtrek heeft een *gelijkzijdige driehoek* de maximale oppervlakte.

Vaste omtrek

De ongelijkheid

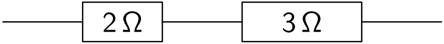
$$O \leqslant \frac{1}{12\sqrt{3}} L^2$$

is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor driehoeken.

Wat heeft de grootste oppervlakte?
Een gelijkzijdige driehoek met omtrek 30
of
een vierkant met omtrek 30?

Gemiddelde weerstand (in serie)

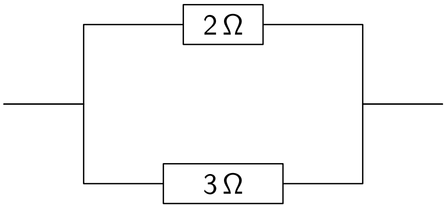
Twee weerstanden in serie



De totale weerstand is ...
Dus de gemiddelde weerstand is ...

Gemiddelde weerstand (parallel)

Twee weerstanden parallel



De totale weerstand is . . .
Dus de gemiddelde weerstand is . . .

Gemiddelde weerstand

Ik wil de twee weerstanden, van 2 en 3 Ohm, vervangen door twee gelijke weerstanden zó dat de totale weerstand gelijk blijft.

In serie: totale weerstand is de som,
de gemiddelde weerstand, ρ_s, is $\frac{1}{2}(2+3)$.

Parallel: de totale weerstand R voldoet aan $\frac{1}{R}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.
De gemiddelde weerstand, ρ_p, moet voldoen aan

$$\frac{1}{\rho_p}+\frac{1}{\rho_p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

Gemiddelde weerstand

Dus twee verschillende gemiddelden!

In serie: $\rho_s = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$

Parallel: $\frac{1}{\rho_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, dus

$$\rho_p = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Nog een gemiddelde

Als a en b zijden van een rechthoek zijn dat heeft een vierkant met zijden $\sqrt{ab}$ dezelfde oppervlakte als die rechthoek.

$\sqrt{ab}$ is *ook* een gemiddelde.

Drie gemiddelden

We hebben voor twee positieve getallen a en b drie gemiddelden

Rekenkundig $R(a, b) = \frac{1}{2}(a + b)$

Meetkundig $M(a, b) = \sqrt{ab}$

Harmonisch $H(a, b) = 2/(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$

Delft University of Technology

Drie gemiddelden

We hebben gezien: $M(a,b) \leqslant R(a,b)$

Ook: $M(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = 1/M(a,b)$ en $H(a,b) = 1/R(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ dus

$$\frac{1}{M(a,b)} = M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \leqslant R\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{H(a,b)}$$

Conclusie

$$H(a,b) \leqslant M(a,b) \leqslant R(a,b)$$

Delft University of Technology

Drie gemiddelden

Je kunt dit gebruiken om wortels af te schatten

$$5\frac{5}{11} \leqslant \sqrt{30} \leqslant 5\frac{5}{10}$$

(a en b slim kiezen)
Je kunt veel met deze (en andere) ongelijkheden doen

De rij $\sqrt[n]{n!}$

We kennen $n!$ (n-faculteit): $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
Hoe snel groeit die rij?

$$n! = \sqrt{n! \times n!}$$

Schrijf dat heel ingewikkeld op:

$$\sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \sqrt{3 \times (n-2)} \times \cdots \times \sqrt{n \times 1}$$

voor elke factor $\sqrt{k \times (n-k+1)}$ krijgen we ...

De rij $\sqrt[n]{n!}$

... een afschatting:

$$\sqrt{k \times (n-k+1)} \leqslant \frac{1}{2}(k+n-k+1) = \frac{n+1}{2}$$

Dus

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{2^n}$$

of ...

De rij $\sqrt[n]{n!}$

. . . voor de n-demachtswortel:

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Een heel makkelijke afschatting van een lastige uitdrukking.

Opgave: toon aan $n! \leqslant \frac{n^n}{2^{n-1}}$.
Hint: zet de n-en apart en bekijk de factoren $k(n-k)$

De rij $\sqrt[n]{n!}$

Er is ook een onderschatting:

Eerst: voor $1 \leqslant k \leqslant n$ geldt $k(n-k+1) - n = (k-1)(n-k) \geqslant 0$.

Dus $k(n-k+1) \geqslant n$ ofwel $\sqrt{k(n-k+1)} \geqslant \sqrt{n}$

En dus:

$$n! \geqslant (\sqrt{n})^n$$

conclusie

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}$$

Delft University of Technology

De rij $\sqrt[n]{n}$

Er is een algemene stelling voor n-tallen positieve getallen:

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

de algemene *Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde*.

Bewijs: eerst voor $n = 8$, dan $n = 7$, $n = 6$, $n = 5$, vervolgens $n = 16$, dan $n = 15$, $n = 14$, ...

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i slim: $a_1 = n$ en $a_2 = \cdots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{1}{n}(n + n - 1) = 2 - \frac{1}{n}$$

Dus, voor alle n geldt

$$\sqrt[n]{n} < 2$$

TU Delft
Delft University of Technology

De rij $\sqrt[n]{n}$

Kies de a_i nog slimmer: $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \cdots = a_n = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}$$

Dus, voor alle n geldt

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$