HET BELANG VAN $\leqslant$

KP HART

Vragen

Tijdens de voordracht op 14 augustus 2007 hebben we de volgende vragen besproken.

- Hoe kun je inzien dat een vierkant, bij gegeven omtrek, de rechthoek met de maximale oppervlakte is?
- Hoe kun je inzien dat een vierkant, bij gegeven oppervlakte, de rechthoek met de minimale omtrek is?
- Waarom is een kubus, bij gegeven oppervlakte, het blok met de maximale inhoud?
- Waarom is een kubus, bij gegeven inhoud, het blok met de minimale oppervlakte?
- Welke driehoek heeft, bij gegeven omtrek, de maximale oppervlakte en waarom?
- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm in serie geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?
- Je hebt een rechthoek van 2×3; wat is de gemiddelde lengte van een zijde?
- Je hebt twee weerstanden van 2 en 3 Ohm parallel geschakeld; wat is de gemiddelde weerstand?
- Wat kun je zeggen over het gedrag van de getallenrij $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{24}, \ldots, \sqrt[n]{n!}, \ldots$?
- Hoe zit het met $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$?

In dit stuk lopen we de gevonden antwoorden nog eens systematisch na en zal ik hier en daar aangeven hoe bepaalde uitspraken algemener genaakt kunnen worden.

Antwoorden

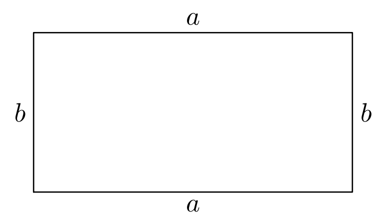
Rechthoeken.

Vaste omtrek ($L = 100$). Neem een rechthoek met omtrek $L = 100$ en zijden a en b. Dan geldt, natuurlijk, $a + b = \frac{1}{2}L = 50$. Wat kunnen we van de oppervlakte $O = ab$ zeggen? Dat wordt wat duidelijker als we naar de posities van a en b op de getallenlijn kijken (Figuur 2): Midden tussen a en b ligt $25 = \frac{1}{2}(a + b)$ en we gebruiken dat om a en b te schrijven als $a = 25 + x$ en $b = 25 - x$. Nu kunnen we ab ook herschrijven en er een conclusie over trekken:

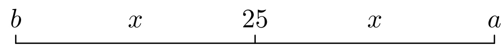
$$O = ab = (25 + x)(25 - x) = 625 - x^2 \leqslant 625 \qquad (\dagger)$$

Dus: we weten zeker dat de oppervlakte van een rechthoek met omtrek 100 nooit groter is dan 625.

Date: Vierkant: 14 augustus 2007.



FIGUUR 1. Een rechthoek met omtrek 100



FIGUUR 2. Ligging van a en b

Is er ook een rechthoek met omtrek 100 en oppervlakte 625? Daar helpt vergelijking (†) ook bij: om $O = 625$ te krijgen moet $x = 0$ gelden en dat geldt alleen als $a = b = 25$. Dus het vierkant met zijden 25 is de enige rechthoek met omtrek 100 die de maximaal haalbare oppervlakte van 625 ook echt haalt.

Het rekenkundige feit dat hier de doorslag gaf is: elk kwadraat is groter dan of gelijk aan nul en alléén het kwadraat van nul is gelijk aan nul.

Vaste omtrek (L willekeurig). We kunnen de redenering hierboven voor elke omtrek herhalen en telkens vinden we dat de oppervlakte van het vierkant met die omtrek maximaal is. Dat wordt na twee of drie keer wat saai en daarom doen we het maar één keer en wel voor alle mogelijke omtrekken tegelijk.

Neem een rechthoek met omtrek L en zijden a en b, zeg met $b < a$. Dan geldt $a + b = \frac{1}{2}L$ en net als boven ligt nu $\frac{1}{4}L$ midden tussen a en b. Nu schrijven we $a = \frac{1}{4}L + x$ en $b = \frac{1}{4}L - x$, dan volgt

$$O = ab = \left(\frac{1}{4}L + x\right)\left(\frac{1}{4}L - x\right) = \left(\frac{1}{4}L\right)^2 - x^2 \leqslant \frac{1}{16}L^2 \tag{‡}$$

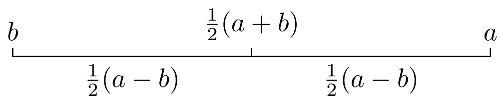
Dus de oppervlakte, O, is kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{16}L^2$ en alléén gelijk aan $\frac{1}{16}L^2$ als $x = 0$, dat wil zeggen als $a = b$, dus als de rechthoek een vierkant is.

Merk ook op dat de dimensies in (‡) kloppen: O is een oppervlaktemaat en L^2 is dat ook.

De ongelijkheid in (‡) heet de *Isoperimetrische Ongelijkheid voor rechthoeken.* ('Iso' betekent gelijk en 'perimeter' betekent omtrek.)

Vaste oppervlakte. Ongelijkheid (†) werkt twee kanten op; je kunt hem ook gebruiken om bij vaste oppervlakte een ondergrens voor de omtrek te bepalen. Als $O = 100$ dan volgt dat $L^2 \geqslant 16O = 1600$, dus $L \geqslant 400$ en alléén voor een vierkant met oppervlakte 100 geldt $L = 40$. Dus: bij vaste oppervlakte, O, heeft een vierkant de kleinste omtrek: $L = 4\sqrt{O}$.

Getallen. Als we de getallen O en L even vergeten en ons op de getallen a en b concentreren krijgen we een ongelijkheid waar in de Wiskunde een heleboel mee te doen is. Wat we hierboven hebben gedaan is het product ab herschrijven; de x die daarbij een rol speelde was gelijk aan $\frac{1}{2}(a - b)$. Als we ook nog $\frac{1}{4}L$ vervangen door



FIGUUR 3. Twee positieve getallen a en b

$\frac{1}{2}(a+b)$ dan komt er

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

en dus

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

of ook wel

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \qquad (**)$$

met gelijkheid alléén als $a = b$. Dit heet de *Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde*. Over de namen van deze gemiddelden komen we later nog te spreken.

Door a en b hierin slim te kiezen kun je snel afschattingen maken.

OPGAVE. Toon aan: $\sqrt{30} < 5\frac{1}{2}$.

Of je kunt nog meer optimaliseringsproblemen aanpakken.

OPGAVE. Een boer wil, met 12 meter gaas, een rechthoekig stukje grond afgrenzen. Hij gebruik zijn schuur als één van de zijden van de rechthoek. Wat is de maximale oppervlakte die hij kan maken? Bij welke lengte en breedte?

Of je kunt er weer geheel andere dingen mee doen.

OPGAVE. Kies een vast positief getal a en definieer een rij getallen door $x_0 = a$ en telkens $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

a. Toon aan dat $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$ voor alle n.

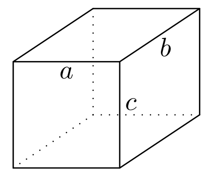
b. Bewijs: $\lim x_n = \sqrt{a}$

c. Experimenteer met je rekenmachientje om te zien hoe goed de benaderingen van $\sqrt{a}$ die je zo krijgt zijn.

Blokken en driehoeken. De vragen over de blokken en de driehoeken blijken hetzelfde gereedschap nodig te hebben; een ongelijkheid die erg op $(**)$ lijkt maar dan voor meer getallen. Voor drie positieve getallen p, q en r geldt (altijd)

$$\sqrt[3]{pqr} \leqslant \frac{p+q+r}{3} \qquad (***)$$

met gelijkheid *alleen* als $p = q = r$; we zullen later zien hoe die formule te *bewijzen* is, net als we $(**)$ *bewezen* hebben.



Figuur 4. Een blok met zijden a, b en c.

Blokken. We hebben een rechthoekig blok met zijden a, b en c en oppervlakte 216 (Figuur 4). Wat kunnen we over het volume zeggen? Neem, in formule $(***)$ eens $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$. Dan geldt $p + q + r = \frac{1}{2}O = 108$ en dus

$$\sqrt[3]{pqr} \leqslant \frac{108}{3} = 36$$

maar $pqr = ab \times ac \times bc = (abc)^2$, dus volgt

$$(abc)^2 \leqslant 36^3$$

en dus

$$abc \leqslant \sqrt{36^3} = \sqrt{36}^3 = 6^3 = 216.$$

Hier staat het maximale volume dat een blok met oppervlakte 216 kan hebben; de gelijkheidsvoorwaarde is $p = q = r$, maar daar volgt heel snel uit dat ook $a = b = c$ moet gelden. Als we dit invullen in de voorwaarde $2(ab+ac+bc) = 216$ vinden we $3a^2 = 3b^2 = 3c^2 = 108$ en dus is het beste blok een kubus met zijden 6.

Algemene ongelijkheid. We kunnen net als bij rechthoeken voor blokken een ongelijkheid afleiden tussen O en V. We vullen in de relatie $(***)$ weer $p = ab$, $q = ac$ en $r = bc$ in:

$$\sqrt[3]{abacbc} \leqslant \frac{ab + ac + bc}{3}$$

Hier staat in feite

$$\sqrt[3]{V^2} \leqslant \frac{1}{6}O \qquad \text{of} \qquad V^2 \leqslant \frac{1}{216}O^3$$

en er geldt gelijkheid alléén als $a = b = c$, dat wil zeggen als het blok een kubus is.

En hiermee is als tevoren het omgekeerde probleem — minimale oppervlakte bij vast volume ook weer op te lossen.

Opgave. Bepaal de minimale oppervlakte van een blok met volume 1000 en de lengten van de zijden van het blok met minimale oppervlakte.

Een bewijs. We gaan $(***)$ bewijzen. We doen dat op de manier waarop de wiskundige A.-L. Cauchy dat in 1821 deed in zijn *Cours d'Analyse*.

We bewijzen de ongelijkheid eerst voor vier getallen a, b, c en d door twee keer de relatie $(**)$ te gebruiken. Eerst

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leqslant \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}$$

en dan

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right) = \frac{a+b+c+d}{4}$$

of, samengevat

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4} \qquad (****)$$

en gelijkheid geldt *alleen* als $a = b = c = d$.

Als we *drie* getallen a, b en c hebben maken we daar een d bij: $d = (a+b+c)/3$. Pas $(****)$ toe

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{3d+d}{4} = d$$

of

$$abcd \leqslant d^4$$

streep links en rechts een d weg: $abc \leqslant d^3$ maar dat is weer equivalent met

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \qquad (***)$$

en weer: gelijkheid geldt alléén als $a = b = c$.

Driehoeken. Voor de oppervlakte van een driehoek met omtrek L en zijden a, b en c bestaat een fraaie formule voor de oppervlakte, de *Formule van Heron*:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hierin is s de *halve* omtrek: $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Opgave. Toon aan dat $s-a$, $s-b$ en $s-c$ positief zijn.

Opgave. Zoek een bewijs van de formule van Heron op of, beter nog, bedenk zelf een bewijs.

We nemen aan dat $L = 30$ en we zoeken de driehoek met omtrek 30 en maximale oppervlakte. We hebben vier getallen, s, $s-a$, $s-b$ en $s-c$, en passen $(****)$ toe:

$$\sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqslant \frac{s+s-a+s-b+s-c}{4} = \frac{4s-2s}{4} = \frac{1}{2}s = \frac{1}{4}L = 7\frac{1}{2}$$

met gelijkheid alléén als $s = s-a = s-b = s-c$ en dat geeft een probleempje want dat kan alleen als $a = b = c = 0$ en dat kan niet want $a+b+c = 30$. Het punt is dat soms gelijkheid niet haalbaar is en dat is hier nu net het geval: er is geen driehoek met omtrek 30 en oppervlakte $7\frac{1}{2}$.

We kijken nog een keer goed naar de formule van Heron en zien dat daar maar *drie* variabele getallen in zitten, dus passen we $(***)$ toe:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leqslant \frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c) = \frac{1}{3}(3s-2s) = \frac{1}{3}s$$

conclusie

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant s \times \frac{1}{27}s^3 = \frac{1}{27}s^4$$

met gelijkheid alléén als $s-a = s-b = s-c$. Na worteltrekken komt er

$$O \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}L^2 = \frac{900}{12\sqrt{3}}$$

Dus de oppervlakte is, bij omtrek 30, nooit groter dan $\frac{900}{12\sqrt{3}}$ en als alle zijden gelijk aan 10 zijn is de oppervlakte precies zo groot.

De ongelijkheid

$$O \leqslant \frac{1}{12\sqrt{3}}L^2$$

is de *Isoperimetrische Ongelijkheid* voor driehoeken.

Opgave. Wat heeft de grootste oppervlakte? Een gelijkzijdige driehoek met omtrek 30 of een vierkant met omtrek 30?

Er is voor elke n een Isoperimetrische Ongelijkheid voor n-hoeken. Deze is altijd van de vorm

$$O \leqslant c_n L^2$$

waarbij de constante c_n alleen van n afhangt.

Opgave. Zoek een bewijs op van die Isoperimetrische Ongelijkheden of bedenk zelf een bewijs. Wat is c_n? Wat is de relaties tussen de c_n onderling? Voor welke n-hoek treedt gelijkheid op?

Er is ook een Isoperimetrische Ongelijkheid voor willekeurige krommen. Deze volgt uit de stelling dat bij gegeven vaste lengte een cirkel de maximale oppervlakte insluit. De ongelijkheid luidt dus

$$O \leqslant \frac{1}{4\pi} L^2.$$

Een bewijs van de stelling is niet geheel eenvoudig.

Gemiddelden. De drie vragen over gemiddelden waren, met opzet, niet precies. De bedoeling was als volgt: ik wil de verschillende weerstanden/lengten door gelijke weerstanden/lengten vervangen en de totale weerstand/oppervlakte gelijk houden. Zo krijgen we drie gemiddelden.

In serie. Het gemiddelde is $\frac{5}{2}$ want bij in serie geschakelde weerstanden tel je weerstanden op, dus twee weerstanden van $\frac{5}{2}$ Ohm kunnen die van 2 en 3 vervangen.

Oppervlakte. Het gemiddelde is $\sqrt{6}$: de oppervlakte is 6 en als je gelijke zijden wilt hebben moet je die $\sqrt{6}$ lang nemen.

Parallel. Als je twee weerstanden R_1 en R_2 parallel schakelt voldoet de totale weerstand R aan

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

In ons geval geldt dus $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$; de *gemiddelde* weerstand ρ moet dus voldoet aan $\frac{2}{\rho} = \frac{5}{6}$ en dus $\rho = \frac{12}{5}$. Een formule voor ρ kun je maken door R_1 en R_2 in plaats van 2 en 3 te gebruiken:

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ en dus } \rho = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Drie gemiddelden. Als iemand vraagt: “wat is het gemiddelde van a en b?” moet je een tegenvraag stellen: “wat bedoel je?”

- in serie geschakelde weerstanden a en b geven het *Rekenkundig gemiddelde*: $R(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$
- de vraag over de oppervlakte geeft ons het *Meetkundig gemiddelde*: $M(a,b) = \sqrt{ab}$.
- parallel geschakelde weerstanden geven ons het *Harmonisch gemiddelde*: $H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

Formule (∗∗) zegt dat altijd $M(a,b) \leqslant R(a,b)$; en daarom heet (∗∗) de ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig gemiddelde. Het Harmonisch gemiddelde past hier ook bij.

Opgave. Toon aan dat $H(a,b) = 1/R(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ en $M(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = 1/M(a,b)$.

Uit (∗∗), toegepast op $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$, volgt nu $M(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) \leqslant R(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ en dus ook $H(a,b) \leqslant M(a,b)$. We zien dat altijd

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

Nu kunnen we $\sqrt{30}$ ook aan de onderkant afschatten.

Opgave. Toon aan: $5\frac{5}{11} \leqslant \sqrt{30} \leqslant 5\frac{5}{10}$.

Meer getallen. De laatste twee vragen gingen over rijen.

De rij $\sqrt[n]{n!}$. De definitie van $n!$ is welbekend: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Die afkorting komt in de Wiskunde heel vaak voor, in de Algebra, de Kansrekening en Statistiek, en in de Combinatoriek bijvoorbeeld.

We gaan iets proberen te zeggen over de groeisnelheid van $n!$ en doen dit door naar de n-demachtswortel te kijken.

We maken eerst een bovenschatting. Dat doen we door $(n!)^2$ te schrijven als

$$1 \times n \times 2 \times (n-1) \times \cdots \times (n-1) \times 2 \times n \times 1$$

op elk product $k(n-k+1)$ passen we (∗∗) toe:

$$\sqrt{k(n-k+1)} \leqslant \frac{1}{2}(k+n-k+1) = \frac{1}{2}(n+1)$$

en zo krijgen we de volgende afschatting van $(n!)^2$:

$$(n!)^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

en daarmee

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n} \qquad \text{of} \qquad \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{1}{2}(n+1)$$

een eenvoudige afschatting van een ingewikkelde uitdrukking.

Opgave. Zet in $(n!)^2$ de twee n-en apart en pas telkens (∗∗) toe op de $n-1$ producten $k(n-k)$ en bewijs

$$n! \leqslant \frac{n^n}{2^{n-1}} \qquad \text{of} \qquad \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{1}{2}n \times \sqrt[n]{2}$$

Is dit een betere of slechtere afschatting van $n!$ dan de eerdere?

Een eenvoudige onderschatting is ook te maken. Bekijk het product $k(n-k+1)$ nog een keer en trek er n van af:

$$k(n-k+1) - n = kn - k^2 + k - n = (k-1)(n-k) \geqslant 0$$

want we bekijken alleen k en n met $1 \leqslant k \leqslant n$.

Conclusie: $k(n-k+1) \geqslant n$ voor alle k en dus

$$(n!)^2 \geqslant n^n$$

en we vinden

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}$$

Voor $n!$ zijn veel betere (af)schattingen gemaakt. Met behulp van integralen kunnen we laten zien dat

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \frac{n}{\mathrm{e}}$$

waar e het grondtal van de natuurlijke logaritme is.

Opgave. (Voor wie wat van integralen weet.) Schrijf het quotiënt $\sqrt[n]{n!}/n$ als $\sqrt[n]{\frac{n!}{n}}$ en neem de natuurlijke logaritme:

$$\ln \sqrt[n]{\frac{n!}{n}} = \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n}\right)$$

Toon aan dat de som aan de rechterkant groter dan of gelijk is aan $\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$, laat zien dat die integraal gelijk is aan -1 en toon zo bovenstaande ongelijkheid aan.

Opgave. (Voor wie nog meer van integralen weet.) Toon aan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. De e uit de ongelijkheid is dus optimaal.

De rij $\sqrt[n]{n}$. Als je de waarden van $\sqrt[n]{n}$ door je rekenmachientje laten benaderen om te kijken wat het gedrag van deze getallenrij zou kunnen zijn zul je zien dat de uitkomsten kleiner zijn dan 2, dat de rij even stijgt — $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ — en dan weer daalt: $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \cdots$.

De vraag is of het rekenmachientje ons op het juiste spoor heeft gezet of dat de rij later ineens weer gaat stijgen.

Een algemene ongelijkheid. Voor het analyseren en afschatten van $\sqrt[n]{n}$ hebben we de algemene *Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde* nodig. Je kunt wel raden hoe die luidt: voor elk n-tal positieve getallen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ geldt

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \tag{$n*$}$$

en er geldt gelijkheid alléén als $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Opgave. Bewijs ongelijkheid $(n*)$. Aanwijzing: bekijk het bewijs voor $n = 4$ en $n = 3$ nog eens goed en doe als Cauchy: bewijs $(n*)$ eerst voor machten van 2 en loop van zo'n macht naar beneden om alle andere getallen af te handelen.

Eerste afschatting. Bij het gebruik van $(n*)$ is het zaak de a_i slim te kiezen; soms is niet altijd duidelijk wat de slimste keuze is maar met wat proberen kom je meestal wel op een goed spoor.

In ons geval willen we $n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ hebben; dat kan heel eenvoudig: neem maar $a_1 = n$ en $a_2 = \cdots = a_n = 1$. Pas $(n*)$ toe, dan volgt

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{1}{n}(n + n - 1) = 2 - \frac{1}{n}$$

dus $\sqrt[n]{n} < 2$, wat misschien door het rekenmachientje gesuggereerd werd maar wat we nu vrij goedkoop hebben kunnen vaststellen voor *alle* n.

Tweede afschatting. We kunnen $n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ op veel meer manieren voor elkaar krijgen: neem maar $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$ en $a_3 = \cdots = a_n = 1$ (voor $n \geqslant 2$). Dan volgt

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Dit is een aanzienlijke verbetering want nu weten dat de rij niet alleen onder de 2 blijft maar zelfs naar 1 *convergeert.*

Nog meer afschattingen. Dit idee kunnen we verder uitbuiten. Neem een k vast en voor $n \geqslant k$ nemen we $a_1 = \cdots = a_k = \sqrt[k]{n}$ en $a_{k+1} = \cdots = a_n = 1$. Dan levert $(n*)$ de volgende afschatting

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{1}{n}(k\sqrt[k]{n} + n - k) = 1 + \frac{k}{n^{1-\frac{1}{k}}} - \frac{k}{n} < 1 + \frac{k}{n^{\frac{k-1}{k}}}$$

We kunnen de exponent van n, ten koste van een grotere constante, net zo dicht bij de 1 krijgen als we willen.

Kunnen we er zelfs voor zorgen dat $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{C}{n}$ voor een of andere constante C? Dat lukt niet. Voor wie wat van de functie e^x weet is dit verrassend eenvoudig aan te tonen.

Opgave. Toon aan dat voor $x \neq 0$ altijd geldt $1 + x < e^x$. Aanwijzing: $y = 1 + x$ beschrijft de raaklijn aan de grafiek van e^x in het punt $(0, 1)$.

Opgave. Gebruik de vorige opgave om in te zien dat

$$\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{\ln n}{n}$$

Aanwijzing: herschrijf $\sqrt[n]{n}$ met behulp van e en ln.

Literatuur

Hieronder een kleine selectie van boeken over ongelijkheden. Ze zijn nog allemaal bij `Amazon.co.uk` te krijgen ([1], [3] en [4] zijn vrij goedkoop.)

[1] Edwin Beckenbach and Richard Bellman, *An Introduction to Inequalities*, New Mathematical Library, vol. 3, The Mathematical Association of America, Washington, 1961. Een niet al te moeilijke inleiding.

[2] G. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities, Second Edition*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambrdige, 1951. Een klassieker. Lastig te lezen maar de moeite waard.

[3] Nicholas D. Kazarinoff, *Geometric Inequalities*, New Mathematical Library, vol. 4, The Mathematical Association of America, Washington, 1961. Ongelijkheden in de meetkunde. Met een hoofdstuk over Isoperimetrische Ongelijkheden.

[4] ———, *Analytic Inequalities*, Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2002. Ongelijkheden en hun toepassingen in de Analyse. Oorspronkelijk verschenen in 1961 bij Holt, Rinehart and Winston.

[5] J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, MAA Problem Books, Cambridge University Press en The Mathematical Association of America, Cambridge en Washington, 2004. Een enthousiast geschreven boek met een heleboel ongelijkheden en interessante opgaven.