

OPMERKINGEN OVER DE EINDEXAMENS WISKUNDE B VWO VAN 2025

KLAAS PIETER HART

INLEIDING

Sommige opgaven in de eindexamens vwo B van 2025 waren niet geheel smetteloos geformuleerd. Hier wat opmerkingen over individuele sommen.

1. RAAKLIJNEN?

De opgave die de meeste reuring veroorzaakte was opgave 3 uit de eerste zittingexamen vwo B van 2025-05-14. Op facebook brak in de groep Leraar Wiskunde een grote discussie los. Net als drie jaar geleden (zie Euclides **98** (1) (2022), 24–36) ging het over raken, in dit geval verticale raaklijnen.

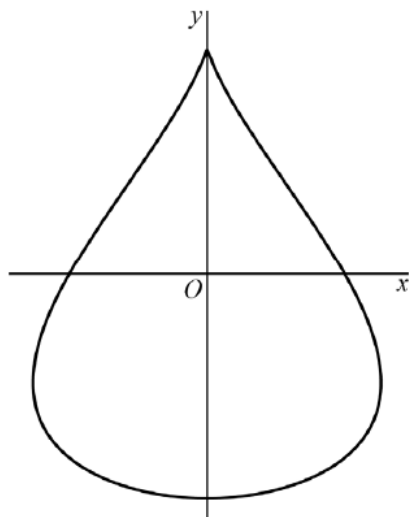
In figuur 1 is de opgave integraal weergegeven.

De kromme K wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \cdot (\cos(t) - 1) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Deze kromme is weergegeven in de figuur.

figuur



In drie punten van deze kromme loopt de raaklijn aan de kromme verticaal.

- 3** Bereken exact de coördinaten van deze drie punten.

FIGUUR 1. Opgave 3

1.1. De officiële uitwerking. De uitwerking is niet moeilijk: verticaal raken gebeurt daar waar er geen horizontale beweging is, waar $x'(t) = 0$ dus.

Differentiëren: $x'(t) = \cos(t) \cdot (\cos(t) - 1) + \sin(t) \cdot -\sin(t) = \cos^2(t) - \cos(t) - \sin^2(t)$ en dat is om te werken tot $(2\cos(t) + 1)(\cos(t) - 1)$. De vergelijking $x'(t) = 0$ leidt dan tot $y = \cos(t) = -\frac{1}{2}$ of $y = \cos(t) = 1$.

We kunnen de punten vinden zonder de t -en te bepalen: als $y = \cos(t) = -\frac{1}{2}$ dan geldt $\sin(t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en dus $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -\frac{3}{2} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}$. Dit levert dan twee punten op: $(\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ en $(-\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

Wat als $y = \cos(t) = 1$? Dan volgt meteen $x(t) = 0$, dus we krijgen het punt $(0, 1)$.

Volgens het correctievoorschrift zijn we klaar: vlak voor de som staat namelijk dat er drie punten zijn met verticale raaklijn, we hebben drie punten gevonden, daar zullen de raaklijnen dan wel verticaal lopen.

1.2. Oh ja? Op facebook werd gevraagd of de opgave niet fout was, want ook leerlingen voelden enige nattigheid.

Als we naar de eerste twee punten kijken is er niets aan de hand: in die punten geldt $y'(t) = -\sin(t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $y'(t) \neq 0$ en de raakvector is daarmee niet ontaard; we hebben twee punten met een verticale raaklijn.

In het derde punt hebben we $y = \cos(t) = 1$, en dus $y'(t) = -\sin(t) = 0$. In het derde punt geldt dus $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$. En dat bracht sommige leerlingen aan het twijfelen: is daar wel een raaklijn?

De opstellers van het correctievoorschrift geloofden de opstellers van de opgave op hun woord dat er drie punten te vinden waren; sommige leerlingen en leraren geloofden dat niet. En in mijn ogen terecht: als je geleerd hebt dat je een verticale raaklijn hebt als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ dan heb je daar niets aan in een geval als dit.

Als je naar de figuur kijkt lijkt er in $(0, 1)$ zelfs een knik in de kromme te zitten, maar dat kan aan de tekening/plot liggen.

De veronderstelling dat het derde punt ergens anders te vinden is is zo gek nog niet.

1.3. Toch wel? We hebben twee punten van twijfel: het eerste is dat beide coördinaten een afgeleide gelijk aan 0 hebben in $(0, 1)$; het tweede is dat de kromme geen punten boven de lijn $y = 1$ heeft en dat $(0, 1)$ een eindpunt/keerpunt is.

Dat laatste is niet zo erg: we kennen wel situaties waar we in een eindpunt best over een raaklijn kunnen spreken. Het lijkt me dat niemand er bezwaar tegen heeft de y -as als verticale raaklijn in $(0, 0)$ aan de grafiek van $y = \sqrt{x}$ te beschouwen: de limiet van de afgeleide voor x naar 0 is ∞ en dat maakt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ een prima raakvector in dat punt.

Blijft de vraag wat te doen met het eerste bezwaar? Hoe hadden we kunnen reageren als de vraag was geweest aan te tonen dat er drie punten zijn waar de raaklijn verticaal loopt?

Om te laten zien dat de y -as de raaklijn aan K in het punt $(0, 1)$ is kun je een paar dingen doen.

Analoog aan de situatie bij de wortelfunctie kun je eerst de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in $(x(t), y(t))$, voor $0 < t < 2\pi$, bepalen en van het resultaat de limiet voor t naar 0 en 2π nemen. Die richtingscoëfficiënt is gelijk aan

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\sin(t)}{(2\cos(t) + 1)(\cos(t) - 1)}$$

na vermenigvuldiging van teller en noemer met $\sin(t)$ en vervangen van $\sin^2(t)$ door $(1 - \cos(t))(1 + \cos(t))$ houden we dit over, na nog wegdelen van $1 - \cos(t)$:

$$\frac{\cos(t) + 1}{(2\cos(t) + 1) \cdot \sin(t)}$$

De factoren $\cos(t) + 1$ en $2\cos(t) + 1$ hebben, respectievelijk, limiet 2 en 3 en zijn dus ongevaarlijk. Blijft over de limiet van $1/\sin(t)$ voor t naar 0 dan wel 2π en die is ∞ als $t \downarrow 0$ en $-\infty$ als $t \uparrow 2\pi$. De y -as is inderdaad een raaklijn.

Alternatief: kijk naar de helling van de verschilvector

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die is gelijk aan

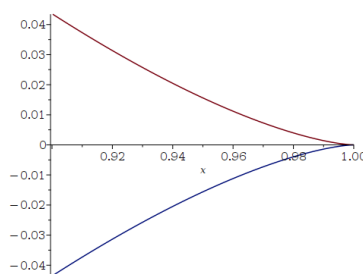
$$\frac{\cos(t) - 1}{\sin(t) \cdot (\cos(t) - 1)} = \frac{1}{\sin(t)}$$

Dit leidt tot dezelfde limieten (afgezien van de factoren 2 en 3) en geeft ook als conclusie dat de raaklijn verticaal loopt.

Een derde manier volgt uit de uitwerking van opgave 4. Daar moest worden aangetoond dat de punten van K aan de vergelijking $x^2 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$ voldoen. Als je namelijk met $x = \sin(t) \cdot (\cos(t) - 1)$ begint en kwadrateert kom je, weer via $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, uit op

$$x^2 = (1 - y^2)(1 - y)^2 = (1 + y)(1 - y)^3$$

Dat geeft $x = \pm\sqrt{1+y} \cdot (1-y)^{\frac{3}{2}}$, en dat laat zien dat x , als functie van y , nabij $y = 1$ ongeveer gelijk is aan $\pm 2(1-y)^{\frac{3}{2}}$. Omdat $\frac{3}{2}$ groter is dan 1 geeft dit een verticale raaklijn.



FIGUUR 2. Het keerpunt

Als we de kromme spiegelen in de lijn $y = x$ ziet hij er op het interval $[0, 1]$ uit als in figuur 2. Inderdaad een horizontale raaklijn want

$$\lim_{y \uparrow 1} \frac{(1-y)^{\frac{3}{2}} - 0}{y - 1} = -\lim_{y \uparrow 1} \sqrt{1-y} = 0$$

1.4. De examenlijn. In het verslag van de eindexamenbespreking van de NVvW staat een, in mijn ogen, niet-zo-sterke reactie van de examenlijn.

Een kromme heeft een verticale raaklijn in een punt als de helling van de raaklijn in dat punt onbepaald is (oftewel $dx/dy = 0$ of dy/dx is $\pm\infty$). Wanneer $dx/dt = 0$ en $dy/dt = 0$ is verder onderzoek noodzakelijk. Nader onderzoek moet uitwijzen of de raaklijn daadwerkelijk verticaal is. Bij het opstellen van de examens gaan we uit van wiskundig correcte beweringen, niet van beschrijvingen in de lesmethoden.

In deze vraag is gegeven al gegeven dat er 3 punten zijn, waar de raaklijn verticaal is. Deze drie punten worden gevonden door $dx/dt = 0$ te berekenen. Verder onderzoek is dus op basis van dit gegeven niet nodig. nb Het is wel noodzakelijk om alle vier de t -waarden waarvoor $dx/dt = 0$ te berekenen om zeker te weten dat er op basis hiervan dé drie punten worden gevonden die in de stam van de vraag worden genoemd en niet nog een extra 4e punt.

(Ik heb de wiskunde op $\text{\TeX}$ -niveau gebracht.)

De eerste zin spreekt zichzelf tegen: onbepaald betekent dat er geen waarde toe te kennen is, en tussen de haakjes gebeurt dat nu net wel. De tweede en derde zinnen snijden hout, maar de vierde weerspiegelt het correctievoorschrift: “wij geloven de opstellers op hun woord dat de opgave klopt”.

De tweede alinea versterkt die laatste indruk en reduceert een potentieel interessante opgave tot “Los $x'(t) = 0$ op”, met op de achtergrond een toetsing van opletten dat twee t -waarden hetzelfde punt opleveren.

Op facebook is de zin over correcte wiskundige beweringen al geparodieerd:

na nader onderzoek hebben we besloten dat “ $x^2 = -1$ heeft geen oplossingen” puntenaftrek geeft, want wiskundig gezien zijn er de complexe oplossingen $\pm i$. In de vraagstelling stond duidelijk aangegeven dat er 2 oplossingen waren. Bij de examens gaan we uit van wiskundig correcte beweringen, niet van beschrijvingen in de lesmethode. (Joeri Moulen)

2. PARAMETRISERING VERSUS VERGELIJKING?

Er was nog iets niet helemaal in orde met deze druppel.

In opgave 4 werd, zoals hierboven vermeld, gevraagd aan te tonen dat de punten op de kromme aan de vergelijking $x^2 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$ voldoen. Dat is hierboven al nagerekend, zij het dat ik bij de ontbonden versie ben blijven steken: $x^2 = (1 + y)(1 - y)^3$.

In opgave 5 werd deze vergelijking gebruikt om de inhoud van het lichaam te berekenen dat ontstaat als de druppel K om de y -as wordt gewenteld. Maar daar werd, ook in het correctievoorschrift, stilzwijgend aangenomen dat de gegeven vergelijking de kromme K volledig beschrijft. En dat is nergens aangetoond. Een paar lezers van mijn oplossingen van de opgaven maakten hier ook opmerkingen over.

Hier is de ontbonden versie van de vergelijking handig; schrijf deze als $x^2 = (1 - y^2)(1 - y)^2$, en deel de vergelijking door $(y - 1)^2$. Er komt

$$\left(\frac{x}{y-1}\right)^2 + y^2 = 1$$

Maar dit betekent dat er voor elk punt (x, y) dat aan de vergelijking voldoet een t bestaat met $y = \cos t$ en $\frac{x}{y-1} = \sin t$. En uit de laatste gelijkheid halen we $x = \sin t \cdot (y - 1) = \sin t \cdot (\cos t - 1)$.

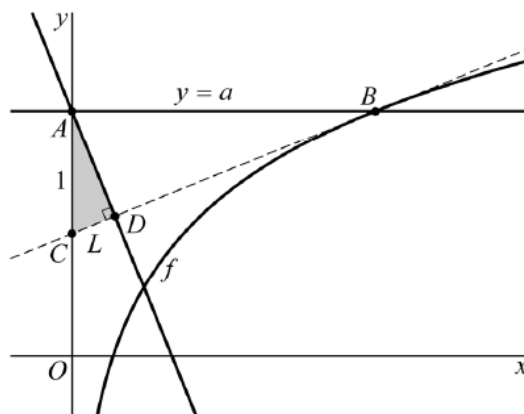
Dus de vergelijking en de parametrisering beschrijven dezelfde kromme. Voor de volledigheid $(0, 1)$ voldoet aan de vergelijking en hoort bij $t = 0$ en bij $t = 2\pi$.

3. NOG EEN ONVOLLEDIGHEID

In de tweede zitting werden een paar sommen — 7, 8, 9, en 10 — opgehangen aan de functie f gegeven door $f(x) = \ln 3x$.

De lijn door A loodrecht op de raaklijn BC snijdt deze raaklijn in punt D . In figuur 3 is voor een waarde van a de rechthoekige driehoek ACD grijs weergegeven.

figuur 3



Als a varieert, varieert de lengte van zijde CD .

Als L de lengte van zijde CD is, dan geldt voor de oppervlakte van de driehoek:

$$\text{Opp}(ACD) = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - L^4}$$

9 Bewijs dit.

FIGUUR 3. Opgave 9

In figuur 3 zien we opgave 9, met een hele inleiding. De opdracht, bewijzen dat de oppervlakte van driehoek ACD gelijk is aan $\frac{1}{2} \sqrt{L^2 - L^4}$ is niet moeilijk: via Pythagoras zien we dat $AD = \sqrt{1 - L^2}$ en klaar zijn we.

Het venijn zit in opgave 10: het bepalen van de maximale oppervlakte van driehoek ACD . Dat wordt in het voorschrift netjes gedaan door de uitdrukking naar L de differentiëren en de nulpunten van de afgeleiden te bepalen, met als resultaat $L^2 = \frac{1}{2}$ en daarmee $L = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, met maximale oppervlakte $\frac{1}{4}$.

Wat is het venijn dan? Welnu: de L -en hangen af van de a s en het is nog maar de vraag of de L -en wel het hele interval $[0, 1]$ bestrijken. Nu is het zo dat de gevonden waarde van L in ieder geval wel bij een waarde van a hoort. Immers, als $CD = L = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan moet ook gelden dat $AD = \sqrt{1 - L^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn moet dan gelijk zijn aan 1. Dat gebeurt als $a = \ln 3$.

Dus de gevonden waarde wordt inderdaad aangenomen.

Voor wie het helemaal wil weten: het punt D en de waarde van L zijn in a uit te drukken. De coördinaten van D zijn $x_D = 1/(3e^{-a} + \frac{1}{3}e^a)$ en $y_D = a - \frac{1}{3}e^a/(3e^{-a} + \frac{1}{3}e^a)$. Daaruit volgt dat de vector $\vec{CD}$ gelijk is aan

$$\frac{1}{3e^{-a} + \frac{1}{3}e^a} \begin{pmatrix} 1 \\ 3e^{-a} \end{pmatrix}$$

en dus geldt

$$L = \frac{\sqrt{1 + 9e^{-2a}}}{3e^{-a} + \frac{1}{3}e^a} = \frac{3e^{-a}}{\sqrt{1 + 9e^{-2a}}}$$

En, inderdaad, als a de reële getallen doorloopt, dan doorloopt $3e^{-a}$ het interval $(0, \infty)$ en L het interval $(0, 1)$.

FACULTEIT EWI, TU DELFT, POSTBUS 5031, 2600 GA DELFT

Email address: `k.p.hart@tudelft.nl`

URL: `http://fa.ewi.tudelft.nl/~hart`