

RAKEN OF NIET RAKEN, DRIE JAAR LATER

KLAAS PIETER HART

INLEIDING

Naar aanleiding van een opgave op het eindexamen vwo-B van 2025-05-14 brak op facebook een discussie los in de groep Leraar Wiskunde. Net als drie jaar geleden (zie Euclides **98** (1) (2022), 24–36) ging het over raken, in dit geval verticale raaklijnen.

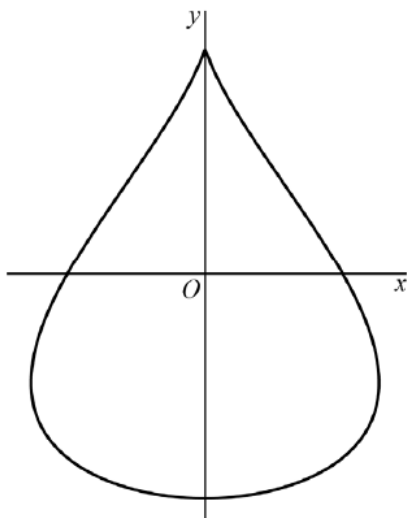
Het gaat om opgave 3, hier integraal weergegeven in figuur 1.

De kromme K wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \cdot (\cos(t) - 1) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Deze kromme is weergegeven in de figuur.

figuur



In drie punten van deze kromme loopt de raaklijn aan de kromme verticaal.

- 3** Bereken exact de coördinaten van deze drie punten.

FIGUUR 1. Opgave 3

1. DE OFFICIËLE UITWERKING

De uitwerking is niet moeilijk: verticaal raken gebeurt daar waar er geen horizontale beweging is, waar $x'(t) = 0$ dus.

Differentiëren: $x'(t) = \cos(t) \cdot (\cos(t) - 1) + \sin(t) \cdot (-\sin(t)) = \cos^2(t) - \cos(t) - \sin^2(t)$ en dat is om te werken tot $(2\cos(t) + 1)(\cos(t) - 1)$. De vergelijking $x'(t) = 0$ leidt dus tot $y = \cos(t) = -\frac{1}{2}$ of $y = \cos(t) = 1$.

We kunnen de punten vinden zonder de t -en te bepalen: als $y = \cos(t) = -\frac{1}{2}$ dan geldt $\sin(t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en dus $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -\frac{3}{2} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Dit levert twee punten: $(\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ en $(-\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

Wat als $y = \cos(t) = 1$? Dan volgt meteen $x(t) = 0$, dus we krijgen het punt $(0, 1)$.

Volgens het correctievoorschrift zijn we klaar: vlak voor de som staat namelijk dat er drie punten zijn met verticale raaklijn, we hebben drie punten gevonden, dus we zijn klaar: daar zullen de raaklijnen dan wel verticaal lopen.

Zie ook de opmerkingen in het verslag van de eindexamenbespreking van de NVvW.

2. OH JA?

Op facebook werd gevraagd of de opgave niet fout was, want ook leerlingen voelden enige nattigheid.

Als we naar de eerste twee punten kijken is er niets aan de hand: in die punten geldt $y'(t) = -\sin(t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $y'(t) \neq 0$ en de raakvector is dus niet ontaard; we hebben twee punten met een verticale raaklijn.

In het derde punt hebben we $y = \cos(t) = 1$, en dus $y'(t) = -\sin(t) = 0$. In het derde punt geldt dus $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$. En dat bracht sommige leerlingen aan het twijfelen: is er wel een raaklijn?

De opstellers van het correctievoorschrift geloofden de opstellers van de opgave op hun woord dat er drie punten te vinden waren; sommige leerlingen en leraren geloofden dat niet. En in mijn ogen terecht: als je geleerd hebt dat je een verticale raaklijn hebt als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ dan heb je daar niets aan in een geval als dit.

Als je naar de figuur kijkt lijkt er in $(0, 1)$ zelfs een knik in de kromme te zitten, maar dat kan aan de tekening/plot liggen.

De veronderstelling dat het derde punt ergens anders te vinden is is zo gek nog niet.

3. TOCH WEL?

We hebben twee punten van twijfel: het eerste is dat beide coördinaten een afgeleide gelijk aan 0 hebben in $(0, 1)$; het tweede is dat de kromme geen punten boven de lijn $y = 1$ heeft en dat $(0, 1)$ een eindpunt/keerpunt is.

Het laatste punt is niet zo erg: we kennen wel situaties waar we in een eindpunt best over een raaklijn kunnen spreken. Het lijkt me dat niemand er bezwaar tegen heeft de y -as als verticale raaklijn in $(0, 0)$ aan de grafiek van $y = \sqrt{x}$ te beschouwen: de limiet van de afgeleide voor x naar 0 is ∞ en dat maakt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ een prima raakvector in dat punt.

Blijft de vraag wat te doen met het eerste bezwaar? Hoe hadden we kunnen reageren als de vraag was geweest aan te tonen dat er drie punten zijn waar de raaklijn verticaal loopt?

Om te laten zien dat de y -as de raaklijn aan K in het punt $(0, 1)$ is kun je een paar dingen doen.

Analoog aan de situatie bij de wortelfunctie kun eerst de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in $(x(t), y(t))$, voor $0 < t < 2\pi$ bepalen en van het resultaat de limiet voor t naar 0 en 2π nemen. Die richtingscoëfficiënt is gelijk aan

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\sin(t)}{(2\cos(t) + 1)(\cos(t) - 1)}$$

na vermenigvuldiging van teller en noemer met $\sin(t)$ en vervangen van $\sin^2(t)$ door $(1 - \cos(t))(1 + \cos(t))$ houden we dit over, na nog wegdelen van $1 - \cos(t)$:

$$\frac{\cos(t) + 1}{(2\cos(t) + 1) \cdot \sin(t)}$$

De factoren $\cos(t) + 1$ en $2\cos(t) + 1$ hebben, respectievelijk, limiet 2 en 3 en zijn dus ongevaarlijk. Blijft over de limiet van $1/\sin(t)$ voor t naar 0 dan wel 2π en die is ∞ als $t \downarrow 0$ en $-\infty$ als $t \uparrow 2\pi$. De y -as is inderdaad een raaklijn.

Alternatief: kijk naar de helling van de verschilvector

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die is gelijk aan

$$\frac{\cos(t) - 1}{\sin(t) \cdot (\cos(t) - 1)} = \frac{1}{\sin(t)}$$

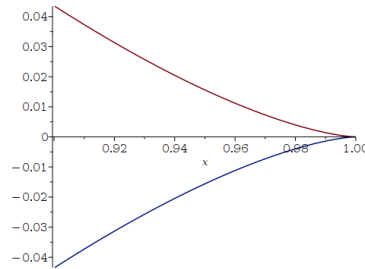
Dit leidt tot dezelfde limieten (afgezien van de factor 6) en geeft ook als conclusie dat de raaklijn verticaal loopt.

Een derde manier volgt uit de uitwerking van opgave 4. Daar moest worden aangetoond dat K gegeven wordt door de vergelijking $x^2 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$. Als je namelijk met $x = \sin(t) \cdot (\cos(t) - 1)$ begint en kwadrateert kom je, weer via $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ uit op

$$x^2 = (1 - y^2)(1 - y)^2 = (1 + y)(1 - y)^3$$

Dat geeft $x = \pm\sqrt{1+y} \cdot (1-y)^{\frac{3}{2}}$, en dat laat zien dat x , als functie van y , nabij $y = 1$ ongeveer gelijk is aan $\pm 2(1-y)^{\frac{3}{2}}$. Omdat $\frac{3}{2}$ groter is dan 1 geeft dit een verticale raaklijn.

Als we de kromme spiegelen in de lijn $y = x$ ziet hij er op het interval $[0, 9, 1]$ zo uit:



Inderdaad een horizontale raaklijn want

$$\lim_{y \uparrow 1} \frac{(1-y)^{\frac{3}{2}} - 0}{y - 1} = -\lim_{y \uparrow 1} \sqrt{1-y} = 0$$

FACULTEIT EWI, TU DELFT, POSTBUS 5031, 2600 GA DELFT

Email address: k.p.hart@tudelft.nl

URL: <http://fa.ewi.tudelft.nl/~hart>