OPMERKINGEN OVER DE EINDEXAMENS WISKUNDE B VWO VAN 2026

KLAAS PIETER HART

Inleiding

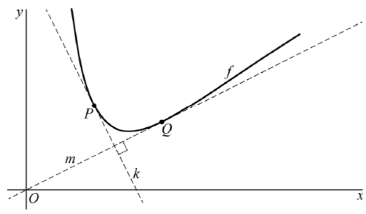
Ik heb de sommen van de eerste zitting op 13 mei gemaakt en becommentarieerd. Hier wil ik wat nader ingaan op de formulering van de opgaven.
De algemene teneur lijkt te zijn de bal op de stip te leggen en de leerling die alleen nog in te laten schieten. Dit heeft tot gevolg dat sommige opgaven (ik hoop onbedoeld) niet helemaal correct zijn en de uitwerkingen in het correctievoorschrift (van nu af afgekort als CV) ook niet.

Opgaven 3 en 4

In opgave 3 worden we geconfronteerd met de functie f gegeven op het interval $(0, 2]$ door

$$f(x) = 2\ln(x) + \frac{3}{2x} - 1$$

met een plaatje



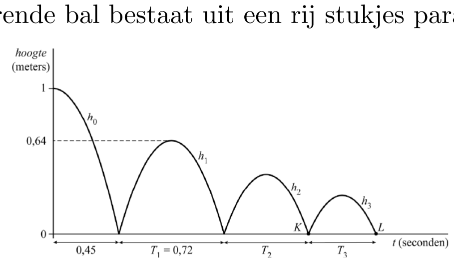
Het domein is klein gehouden om te garanderen dat er op de grafiek van f één punt Q is waar de raaklijn een bepaalde helling heeft (was het 'natuurlijke' domein $(0, \infty)$ gekozen dan waren er twee van die punten geweest). Daar is op zich niets is mee, maar het heeft invloed op de volgende opgave. Daarin komen we de functie g tegen, gegeven door: Een tweede functie g wordt gegeven door

$$g(x) = 2\ln(2x) + \frac{3}{4x} - 1$$

zonder een domein mee te geven. Meestal is het domein dan impliciet het natuurlijke domein, in dit geval dus $(0, \infty)$.
Opgave 4 vraagt dan de transformatie te geven die de grafiek van g laat ontstaan uit die van f. De bedoelde transformatie, "vermenigvuldig ten opzichte van de y-as met de factor $\frac{1}{2}$", voert de grafiek van f over in een functie met dezelfde formule als g, maar met het interval $(0, 1]$ als domein. De vraag is eigenlijk niet te maken omdat het domein van g niet bekend is.
Men kan beargumenteren dat de formulering "het is mogelijk de grafiek van g te laten onstaan uit de grafiek van f ..." ons moet laten denken dat kennelijk $(0, 1]$ als domein van g bedoeld is, maar klinkt als verantwoordelijkheid afschuiven. Het CV kijkt alleen maar naar de formule van f en g en zegt niets over het ontbrekende domein.

Opgave 9

De hoogtefunctie van een stuiterende bal bestaat uit een rij stukjes parabool



De vraag was een formule voor de functie h_3 op te stellen.

Datum: 19-05-2026/13:32:04.

Uit de gegevens volgt dat de punten K en L bij, respectievelijk, $t_K = 1{,}746$ en $t_L = 2{,}2068$ liggen; de top van h_3 ligt daar halverwege tussen, bij $t_T = 1{,}9764$, en op hoogte $h = 0{,}64^3 = 0{,}262114$.
Mijn oplossing gebruikte dat de gravitatieconstante g niet verandert; ik maakte er $h_3(t) = h - 4{,}9(t-t_T)^2$ van; die 4,9 komt uit de gegeven formule voor h_0.
Het correctievoorschrift wilde dat de grafiek van h_3 niet alleen door de top maar ook door K en L zou gaat, met als resultaat $h_3(t) = h - 4{,}94(t - t_T)^2$.
Beide voorschriften zijn in feite niet correct want invullen van t_K en t_L levert niet de waarde 0 op (afrondingen onderweg).
Voor beide oplossingen is iets te zeggen maar het CV geeft aan dat aannemen dat g constant is twee van de zeven punten kost; dat is discutabel. Men zou ook kunnen concluderen dat het gegeven model niet deugt omdat het een variabele gravitatieconstante nodig heeft/impliceert.

Opgaven 10, 11, en 12

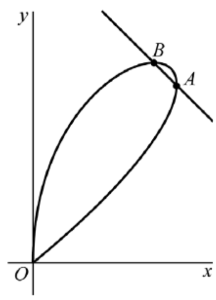
De sommen staan onder het kopje "Lus" en gaan over punten die een lus doorlopen. Een punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen

$$x(t) = t^2(2-t) \text{ en } y(t) = 2t(2-t) \quad \text{met} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

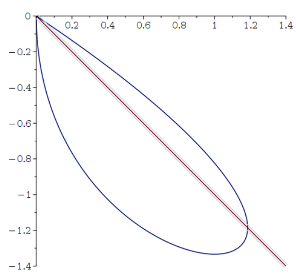
Opgaven 10 en 11 gaan over deze baan.
Een ander punt beweegt zich volgens

$$x(t) = t^2(2-t) \text{ en } y(t) = at(2-t)$$

waarbij a een constante *ongelijk aan* 0 is.
Aan de hand van dit plaatje



wordt geïllustreerd dat er een waarde van a is waarvoor de helling van de lijn door A en B gelijk is aan -1. Hierbij is A het punt met maximum x-coördinaat, en B het punt met maximum y-coördinaat.
Let wel: "een waarde" niet "één waarde"; toch vraagt opgave 12 "deze waarde van a" exact te bepalen.
De oplossingen in het CV gaan er alledrie impliciet vanuit dat a *positief* is: B wordt gevonden door $2a - 2at = 0$ op te lossen en dan $B = \bigl(x(1), y(1)\bigr)$ te nemen, *zonder te controleren dat in $t = 1$ wel een maximum optreedt.* Het tekenschema wijst uit dat dit inderdaad geldt als $a > 0$, maar als $a < 0$ treedt in $t = 1$ een minimum op.
Als a negatief is geldt $B = (0,0)$, want dan is $y(0) = y(2) = 0$ de maximale waarde van $y(t)$ en dan ziet de situatie er, als $a = -\frac{4}{3}$, zo uit:



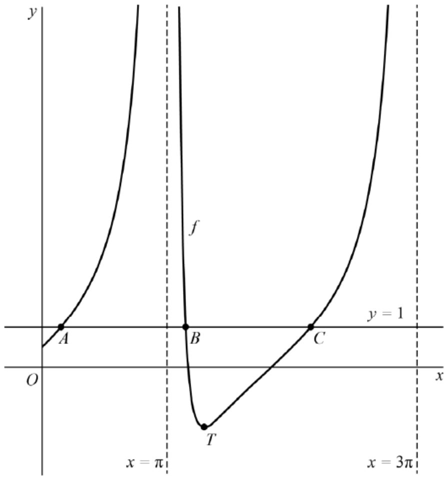
Men zou nog kunnen beargumenteren dan, net als bij opgave 4, het domein van de geparametriseerde parametrizering de hele reële rechte is, omdat het interval $[0,2]$ uit de sommen 10 en 11 niet expliciet meegenomen is. Maar in dat geval is er geen maximum x-coördinaat omdat $x(t)$ een derdegraadsfunctie is.
De oplossingen uit het CV zijn alleen zinvol als men $[0,2]$ als t-interval aanhoudt en in dat geval had men de tweede, negatieve, waarde van a moeten vinden.

Opgave 15

Dit is een opgave die illustreert dat een overdaad aan gegevens tot oneigenlijke oplossingen leidt. Het gaat om de functie f, gegeven door

$$f(x) = \frac{1 + 2\sin(x)}{1 + \cos(x)} \text{ op } [0, 3\pi) \setminus \{\pi\}$$

met de bijgeleverde grafiek



In opgave 13 is onafhankelijk van 14 en 15; die twee gaan over het punt T op de grafiek, daarvan wordt verklapt dat het een top is die onder de x-as ligt.
In opgave 14 moest worden aangetoond dat de x-coördinaat van T voldoet aan $5\cos^2(x)+8\cos(x)+3 = 0$. Dat verloopt via de afgeleide

$$f'(x) = \frac{2\cos(x) + \sin(x) + 2}{(1 + \cos(x))^2}$$

en nul stellen van de teller: $2\cos(x) + \sin(x) + 2 = 0$. Door $2\cos(x) + 2 = -\sin(x)$ links en rechts te kwadrateren komt men op de gewenste vergelijking.
Opgave 15 vraagt naar de y-coördinaat van T. De vergelijking uit opgave 14 laat zich ontbinden tot $(5\cos(x) + 3)(\cos(x) + 1) = 0$, met uitkomsten $\cos(x) = -\frac{3}{5}$ en $\cos(x) = -1$. De tweede uitkomst valt af omdat de bijbehorende x-en, π en 3π, buiten het domein liggen (en asymptoten bepalen). Bij $\cos(x) = -\frac{3}{5}$ hoort $\sin(x) = \frac{4}{5}$ of $\sin(x) = -\frac{4}{5}$ (denk aan de rechthoekige driehoek met zijden 3, 4, en 5). Het paar $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ komt twee keer voor, in de intervallen $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ en $(\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$. Als dit paar in de teller van $f'(x)$ invult komt er $-\frac{6}{5} + \frac{4}{5} + 2 = \frac{12}{5}$, dus deze x-en vallen af. Dit waren in feite spookoplossingen die veroorzaakt waren door het kwadrateren.
Als je het paar $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ invult komt er $-\frac{6}{5} - \frac{4}{5} + 2 = 0$. Dat levert dus een x_0 met $f'(x_0) = 0$, en wel in het interval $(\pi, \frac{3\pi}{2})$. Voor wie tot het gaatje wil gaan: de afgeleide van de teller van f' is gelijk aan $-2\sin(x) + \cos(x)$, invullen van x_0 geeft $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 1$. Dus de teller is rond x_0 een stijgende functie, dus $f'(x) < 0$ links van x_0 en $f'(x) > 0$ rechts van x_0. Dus in x_0 vinden we een minium (en dus een top). Verder geldt $f(x_0) = (1 - \frac{8}{5})/(1 - \frac{3}{5}) = -\frac{3}{2}$, en dat is het gevraagde antwoord.
De oplossing in het CV is een stuk korter: waarom $\cos(x) = -1$ niet voldoet wordt niet vermeld. We krijgen de waarden van $\cos(x)$ en $\sin(x)$, dus $-\frac{3}{5}$ en $\pm\frac{4}{5}$. Die worden klakkeloos in f ingevuld, met uitkomsten $-\frac{3}{2}$ en $\frac{13}{2}$. Van de laatste wordt vermeld dat die niet voldoet, maar niet waarom.
Ik vermoed dat het geval $\sin(x) = \frac{4}{5}$ niet afvalt omdat het de afgeleide ongelijk aan 0 maakt, maar omdat we al weten dat we een negatieve waarde zoeken. Hierdoor toetst deze vraag bijna niets: het oplossen van een tweedegraadsvergelijking, dat $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, en de durf om niet verder naar x_0 te zoeken en de (co)sinuswaarden meteen in te vullen (en positief van negatief te onderscheiden). Jammer eigenlijk.

Faculteit EWI, TU Delft, Postbus 5031, 2600 GA Delft
Email address: k.p.hart@tudelft.nl
URL: http://fa.ewi.tudelft.nl/~hart