wo $n_1, n_2, \ldots$ unbeschränkte, positive, ganzzahlige Indices in unendlicher Anzahl sind ».

Halle d. 7ten December 73.

In den letzten Tagen habe ich die Zeit gehabt, etwas nachhaltiger meine Ihnen gegenüber ausgesprochene Vermuthung zu verfolgen ; erste heute glaube ich mit der Sache fertig geworden zu sein ; sollte ich mich jedoch täuschen, so finde ich gewiss keinen nachsichtigeren Beurtheiler, als Sie. Ich nehme mir also die Freiheit, Ihrem Urtheile zu unterbreiten, was soeben in der Unvollkommenheit des ersten Conceptes zu Papier gebracht ist.

Man nehme an, es könnten alle positiven Zahlen $\omega < 1$ in die Reihe gebracht werden :

(I) $$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n \cdots\cdots$$

Auf ω_1 folgend sei ω_α das nächst grössere Glied, auf dieses folgend ω_β das nächst grössere, u. s. f. Man setze : $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$ u. s. f. und hebe aus (I) die unendliche Reihe aus :

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \cdots, \omega_1^n, \cdots$$

In der übrig bleibenden Reihe werde das erste Glied mit ω_2^1, das nächt folgende grössere mit ω_2^2 bezeichnet, u. s. f. so hebe man die zweite Reihe aus :

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \cdots \omega_2^n \cdots$$

Wird diese Betrachtung fortgesetzt, so erkennt man dass die Reihe (I) sich in die unendlich vielen zerlegen lässt :

(1) $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \cdots, \omega_1^n, \cdots$

(2) $\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \cdots, \omega_2^n \cdots$

(3) $\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \cdots, \omega_3^n \cdots$

in jeder von ihnen wachsen aber die Glieder fortwährend von links nach rechts zu ; es ist :

$$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}.$$

Man nehme nun ein Intervall $(p \cdots q)$ so an, dass kein Glied der Reihe (1) in ihm liegt ; also etwa innerhalb $(\omega_1^1 \cdots \omega_1^2)$; nun könnten auch etwa sämtliche Glieder der zweiten Reihe, oder der dritten ausserhalb $(p \cdot\cdot q)$ liegen ; es muss jedoch einmal eine Reihe kommen, ich will sagen die k^{te}, bei welcher nicht alle Glieder ausserhalb $(p \cdot\cdot q)$ liegen ; (denn sonst würden die innerhalb $(p \cdot\cdot q)$ liegenden Zahlen nicht in (I) enthalten sein, gegen die Voraussetzung) ; dann kann man ein Intervall $(p' \cdot\cdot q')$ innerhalb $(p \cdot\cdot q)$ fixieren, so dass die Glieder der k^{ten}, Reihe alle ausserhalb desselben liegen ; von selbst verhält sich dann $(p' \cdot\cdot q')$ in gleicher Weise in Bezug auf die vorhergehenden Reihen ; im weiteren Verlaufe muss jedoch eine k'^{te} Reihe erscheinen, deren Glieder nicht sämmtlich ausserhalb $(p' \cdot\cdot q')$ liegen und man nehme dann innerhalb $(p' \cdot\cdot q')$ ein drittes Intervall $(p'' \cdot\cdot q'')$ an, so dass alle Glieder der k'^{ten} Reihe ausserhalb desselben liegen.

So sieht man, dass es möglich ist eine unendliche Reihe von Intervallen zu bilden :

$$(p \cdot\cdot q), (p' \cdot\cdot q'), (p'' \cdot\cdot q''), \cdots\cdots$$

von denen jedes die folgenden einschliesst und die zu unsern Reihen (1), (2), (3), ... sich wie folgt verhalten :

Die Glieder der 1ten, 2ten, ... $k - 1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb $(p \cdot\cdot q)$

» » $k^{ten} \cdot\cdot \overline{k' - 1}^{ten}$ » » $(p' \cdot\cdot q')$

» » $k'^{ten} \cdot\cdot \overline{k'' - 1}^{ten}$ » » $(p'' \cdot\cdot q'')$

Es lässt sich nun stets *wenigstens* eine Zahl, ich will sie η nennen, denken, welche im Innern eines jeden dieser Intervalle liegt ; von dieser Zahl η, welche offenbar $\begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$, sieht man rasch, dass sie in keiner unserer Reihen (1), (2), ..., (n), enthalten sein kann. So würde man von der Voraussetzung ausgehend, dass alle Zahlen $\begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$ in (I) enthalten seien, zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt sein, dass eine bestimmte Zahl $\eta \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 0 \end{smallmatrix}$ *nicht* unter (I) zu finden sei ; folglich ist die Voraussetzung eine unrichtige gewesen.

So glaube ich schliesslich zum Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefen mit (x) bezeichnete Inbegriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen lässt.