EINDEXAMEN WISKUNDE A, 2017

1 Een verhaal over prijsstijgingen leidt tot de vraag: als een prijs elk jaar met 5 % omhoog gaat na hoeveel jaar is deze dan verdubbeld?
Uitwerking: Met andere woorden: bepaal de kleinste n waarvoor $1,05^n \geq 2$.
Met behulp van logaritmen lossen we $1{,}05^t = 2$ op: $t{\cdot}\log 1,05 = \log 2$ en dus $t = \frac{\log 1{,}05}{\log 2}$. Rekenmachientje: $t \approx 14{,}207$ en dus is $n = 15$ als gezocht.
Opmerkingen: Geen moeilijke som maar in de aanhef staat overbodige informatie over prijs en rendement van zonnepanelen. Is dat een test om kaf van koren te scheiden?

2 De vraag is nu in welk jaar het aankoopbedrag van twaalf zonnepanelen is terugverdiend. Gegevens: kostprijs: 6299 Euro, opbrengst: 2500 kWh/j, electriciteitsprijs: 0?225 Euro per kWh, subsidie: 15 % van de aankoopprijs tot een maximum van 650 Euro.
Uitwerking: Ten eerste 15 % van 6299 Euro is 944,85 Euro; er komt gaat dus 650 Euro subsidie van de aankoopprijs af. We moeten $6299 - 650 = 5649$ Euro terugverdienen. De besparing per jaar is $2500 \cdots 0{,}225 = 562{,}50$ Euro. Duidelijk is dat na tien jaar 5625 Euro is terugverdiend, net niet genoeg. In het elfde jaar overschrijdt de jaaropbrengst de resterende 24 Euro ruimschoots; in het elfde jaar is het aankoopbedrag terugverdient.
Opmerkingen: Het antwoordmodel berekent 5649/562,50 (iets meer dan 10) en accepteert "in het elfde jaar" als alternatief antwoord, terwijl dat eigenlijk het antwoord op de vraag "in welk jaar" is.

3 Nu wordt gevraagd de voorgegeven formule

$$T = \frac{1300 + 325x}{46{,}9x}$$

voor de terugverdientijd als functie van het aantal aangeschafte panelen x. Hierbij gaat met uit van zelfinstallatie, zonder subsidie, met een basisprijs van 1300 Euro (vaste kosten) plus 325 Euro per paneel.
Uitwerking: De terug te verdienen kosten zijn gegeven door $1300 + 325x$; die moeten gedeeld worden door de besparing per jaar. Uit een gegeven tabel is af te leiden dat een paneel een jaaropbrengst van 208,3 kWh heeft en dus een jaarlijkse besparing van $208{,}3 \times 0{,}225 \approx 46{,}9$ Euro; de jaarlijkse besparing is dus $46{,}9x$. Nu het aankoopbedrag door de jaarlijkse besparing delen.
Opmerkingen: De kolommen in de tabel geven niet allemaal dezelfde opbrengst per paneel, maar de afgeronde jaarlijkse besparing is telkens wel dezelfde.

4 Nu moet worden aangetoond dat T een dalende functie van x is, *met behulp van de afgeleide.*
Uitwerking: De afgeleide is gelijk aan (quotiëntregel):

$$-\frac{1300}{46{,}9x^2}$$

Deze is duidelijk negatief, dus T is dalend.
Opmerkingen: Ietwat gezocht: $T = \frac{325}{46{,}9} + \frac{1300}{46{,}9x}$ is een geschaalde en opgeschoven versie van $1/x$ en dus duidelijk dalend.
NB De overbodige gegevens bij opgave 1 zijn dus niet meer teruggekomen.

5 Een grote tabel met percentages kinderen die van inkomensgroepen verhuizen leidt tot de vraag welk percentage mensen in de VS in dezelfde inkomensgroep als hun ouders terecht komen.
Uitwerking: De bedoeling lijkt de percentages blijvers per groep te middelen. Het antwoord is in dat geval $\frac{1}{5}(43 + 24 + 23 + 24 + 40) = 30{,}8$.
Opmerkingen: Aan deze vraag kleven twee problemen: in de tabel staan *kansen* gegeven, dat betekent dat het getal 30,8 een verwachtingswaarde is en niet een zeker percentage. Daarnaast wordt er, kennelijk, van uit gegaan dat het geboortecijfer in elke inkomensgroep hetzelfde is. Als, bijvoorbeeld, het geboortecijfer in de laagste groep het dubbele van het cijfers voor de andere groepen is (de verhouding is dus $2 : 1 : 1 : 1 : 1$) dan zal het antwoord gelijk zijn aan 32,8 %. In de tekst wordt nergens expliciet gezegd dat het geboortecijfer uniform is verondersteld; er wordt alleen gesproken over gelijke verdeling van gezinnen en van ouders over de groepen (ook dat hoeft niet hetzelfde te zijn).

6 Van een 200 in de laagste groep geborenen individuen wordt gevraagd de kans te berekenen dan meer dan de helft in een hogere inkomensgroep terecht te komen.
Uitwerking: Het aantal mensen, X, dat in een hogere groep terecht komt is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en succeskans $p = 0{,}57$ (de tabel zegt dat men met kans 43 % in de groep blijft). Dan geldt $P(X > 100) = 0{,}9726590913$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

7 De in de tabel gegeven kans, 0,04, dat iemand uit de laagste groep zich opwerkt naar de hoogste groep wordt getoetst met een steekproef van 600 mensen die in de laagste groep zijn geboren, 34 daarvan heeft zich naar de hoogste groep opgewerkt. Men vind de gegeven kans te laag en neem een significantieniveau van 5 %..
Uitwerking: Volgens de nulhypothese is het aantal succesgevallen, S, binomiaal verdeeld met $n = 600$ en succeskans $p \leq 0{,}04$. Onder deze voorwaarden geldt $P(S \geq 34) \leq 0{,}0286312131$. Dat is kleiner dan 0,05, dus de nulhypothese wordt verworpen.
Opmerkingen: Standaard

8 In de kolom 'hoogste inkomen' is te zien dat 8 % van de kinderen uit die groep in de laagste inkomensgroep terecht komen. Citaat uit de krant: "de kans dat je hoog geboren wordt en laag eindigt is 8 %". De opgave vraagt te laten zien dat dit niet klopt door het juiste getal te bepalen.
Uitwerking: In de tabel staat de voorwaardelijk kans: je eindigt laag *gegeven* dat je hoog begint. Het citaat maak hier een doorsnede van: je eindigt laag *en* je begint hoog. Weer onder de aanname van een uniform geboortecijfer is de kans op die doorsnede gelijk aan $0{,}2 \times 0{,}08 = 0{,}016$.
Opmerkingen: Als de geboortecijfers als in de opmerking bij opgave 5 zouden zijn dan zou de kans gelijk zijn aan $0{,}08/6 = 0{,}01333\ldots$.

9 Deze en de opgaven 10–12 gaan over de relatie hartslag-levensduur. Het hart van een zoogdier slaat in een leven zo'n 1 miljard keer. Hoe lang (gemiddeld) leeft een exemplaar van een hondenras met een hartslag van 125 per minuut (gemiddeld)?
Uitwerking: Een gemiddelde hond leeft dus $10^9/125 = 8 \times 10^6$ (acht miljoen) minuten. Een gewoon jaar heeft $365 \times 24 \times 60 = 525600$ minuten. Dat geeft $8.000.000/525600 = 15{,}22$ gewone levensjaren. Rekening houdend met schrikkeljaren krijgen we 525960 minuten per gemiddeld jaar en een levensduur van 15,21 jaar.
Opmerkingen: Een simpele rekensom.

10 Gevraagd aan te tonen dat dat $H = 1900/L$; hierin is H de hartslag (per minuut) en L de levensduur (in jaren).
Uitwerking: Uit de gegevens volgt dat $10^9 = L \times 525600 \times H$ bij normale jaren of $10^9 = L \times 525960 \times H$ bij schrikkeljaren.
Hieruit volgt dat $L \times H = 10^9/525600 \approx 1902{,}6$ of $L \times H = 10^9/525960 \approx 1901{,}3$. Beide leiden na afronding tot twee significante cijfers tot $L \times H = 1900$, of $H = 1900/L$.
Opmerkingen: Ook simpel rekenwerk. Zullen de leerlingen afronden om naar het antwoord te komen of omdat het gerechtvaardigd is?

11 Een ander model voor de relatie $H = b \cdot g^L$. Voor een walvis geldt $L = 60$ en $H = 25$, voor een hamster geldt $L = 3$ en $H = 450$. Bepaal g in drie decimalen en b in gehelen.
Uitwerking: We krijgen twee vergelijkingen met twee onbekenden: $25 = b \cdot g^{60}$ en $450 = b \cdot g^3$. Als we die op elkaar delen vinden we $25/450 = g^{57}$ en dus $g = (1/18)^{\frac{1}{57}} \approx 0{,}9505559295$, afgerond $g = 0{,}951$. Vervolgens: $b = 450 \cdot g^{-3} \approx 523{,}9375052$, in gehelen $b = 524$.

12 Nu L uitdrukken in H, uitgaande van verder afgeronde b en g: $H = 520 \cdot 0{,}95^L$. Schrijf $L = b + a \cdot \log H$ en bepaal a en b in twee decimalen.
Uitwerking: Neem links en rechts de logaritme: $\log H = \log 520 + L \log 0{,}95$ en dus

$$L = \frac{\log H - \log 520}{\log 0{,}95}$$

Dus $a = 1/\log 0{,}95 \approx -44{,}89$ en $b = -\log 520/\log 0{,}95 \approx 121{,}92$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; wat ik niet gedaan zou hebben is b ook in de nieuwe formule gebruiken.

13 Deze en vragen 14–16 gaan over maximum temperaturen en kansverdelingen. Om te beginnen: bereken $P(X \geq 35)$ als X normaal verdeeld is met $\mu = 33{,}5$ en $\sigma = 1{,}8$. (Kans op een maximum temperatuur van 35°C of meer in 2006.)
Uitwerking: Terugschalen naar de standaard-normale verdeling, dat wil zeggen $(35 - \mu)/\sigma$ bepalen: $(35 - 33{,}5)/1{,}8 = 5/6$. Vervolgens de kans is gelijk aan $1 - \Phi(5/6) \approx 0{,}20238$.
Opmerkingen: Standaard.

14 In 1980 was de kans op een maximumtemparatuur van 35°C (of meer) slechts 0,01; de kans op 31°C (of meer) was 0,5. Gevraagd: de standaardafwijking in 1980, op één decimaal.
Uitwerking: De temperatuur voor 1980 is ook normaal verdeeld verondersteld. Het gemiddelde is dus 31 (want de kans op 31 of meer is $\frac{1}{2}$). Nu moeten we dus uitvlooien voor welke σ het getal 35 na schaling uitkomt op het punt p waar $P(X \geq p) = 0{,}01$ (of $P(X < p) = 0{,}99$) als X standaard normaal verdeeld is. Dat punt is $p = 2{,}326347874$ en $\sigma = (35 - 31)/p \approx 1{,}719433299$; op één decimaal is dat 1,7.

15 De verdeling voor 1951 heeft $\mu = 29{,}8$ en $\sigma = 1{,}8$. Gevraagd wordt de grafiek aan te wijzen op de uitwerkbijlage.
Uitwerking: Er zijn vier mogelijkheden: A, B, C, en D. Alleen A en B hebben het juiste gemiddelde. Alleen B en C hebben de juiste hoogte want deze wordt bepaald door σ (de factor $1/\sigma$ in de formule) en de verdeling voor 2006 heeft ook $\sigma = 1{,}8$. Blijft over: B.
Opmerkingen: Aardige vraag.

16 De vraag is de vergelijking een trendlijn in een grafiek op te stellen en deze te gebruiken om te zien wanneer de maximale temperatuur bij de Vierdaagse 28°C zal zijn.
Uitwerking: Twee roosterpunten op de lijn zijn $(1950, 22)$ en $(1990, 24)$. Het opstellen van de vergelijking, $y = at + b$, kan op vele manieren. Bijvoorbeeld door beide punten in te vullen en het resulterende stelsel naar a en b op te lossen: $22 = 1950a + b$ en $24 = 1990a + b$. Aftrekken geeft $2 = 40a$, dus $a = 1/20 = 0{,}05$. Vervolgens b bepalen: $b = 22 - 1950/20 = -75{,}5$. Dit geeft de vergelijking $y = 0{,}05t - 75{,}5$. Hierbij correspondeert $t = 0$ met het jaar nul. Als we $t = 0$ met het jaar 1950 laten corresponderen komt er $y = t/20 + 22$.
Vervolgens lossen we $28 = t/20 + 22$ op: $t = 6 \times 20 = 120$, dus voor 2070 voorspelt de trendlijn een maximale temperatuur van 28°C.
Opmerkingen: De trendlijn komt uit de zwarte doos; het is mij niet duidelijk hoe deze tot stand gekomen is. En het is wel erg veel context voor zo'n eenvoudig sommetje.

17 In de laatste opgaven, 17–20, gaat het om hardlooptijden. De volgende formule

$$T_2 = T_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{1{,}07}$$

relateerd de tijd T_2, in seconden, die een hardloper realiseert over afstand d_2, in meters, als zij de afstand d_1 in een tijd van T_1 loopt.

Gegeven een tijd van 4:52 over 1500 meter; bereken de verwachtte tijd over 10 000 meter.
Uitwerking: Invullen: $T_2 = 292 \cdot (20/3)^{1{,}07} \approx 2223{,}131766$; dat is 37 minuten en 3 seconden.

18 Bepaal met welk percentage de gemiddelde snelheid afneemt als de afstand verdubbelt.
Uitwerking: Er geldt $v_i = d_i/T_i$ dus

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{1{,}07}$$

Als we $d_2 = 2d_1$ nemen dan volgt $v_2/v_1 = 2^{-0{,}07} \approx 0{,}952637998$. De snelheid gaat dus met iets minder dan vijf procent omlaag.

19 Vervolgens kijken we naar de kilometertijd: $K = T/d$ (tijd gedeeld door afstand, seconden per kilometer). Gegeven: het wereldrecord op de 1500 meter is 3:26. Hieruit volgt dus $T = 206 \cdot \left(\frac{d}{1{,}5}\right)^{1{,}07}$ als voorspeller voor een wereldrecord over een afstand van d kilometer. Gebruik $K = T/d$ om de formule $K = 133{,}49 \cdot d^{0{,}07}$ voor de bijbehorende kilometertijd af te leiden.
Uitwerking: Vul in: $K = T \cdot d^{-1} = 206 \cdot 1{,}5^{-1{,}07} \cdot d^{1{,}07} \cdot d^{-1} = 206 \cdot 1{,}5^{-1{,}07} \cdot d^{0{,}07}$. Verder: $206 \cdot 1{,}5^{-1{,}07} \approx 133{,}4902582$, dat is afgerond 133,49.
Opmerkingen: Hier is wel erg veel voorgekauwd.

20 Laat zien dat de kilometertijden afnemend stijgen, met behulp van de afgeleide K'.
Uitwerking: De stijging neemt af betekent dat de afgeleide positief blijft maar dalend is. Er geldt $K' = 133{,}49 \cdot 0{,}07 \cdot d^{-0{,}93} = 9.3443 \cdot d^{-0{,}93}$. Inderdaad: K' is en blijft positief; de negatieve exponent zorgt voor daling van K'.