# EINDEXAMEN WISKUNDE A, VWO, 2021-05-17

**1** De rondheid van getallen volgens de ‘formule van Sigurd’. Wie is het rondst: 600 of 750?
**Uitwerking**: De rondheid van 600 was als voorbeeld bepaald: $R(600) = \frac{23}{96} \approx 0{,}24$. We gebruiken

$$R(n) = \frac{1000}{n} + \frac{100}{n} + \frac{10}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{500}{n} + \frac{50}{n} + \frac{5}{n}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{250}{n} + \frac{25}{n}\right)$$

En een breuk telt alleen mee als de teller de noemer deelt. Dus

$$R(750) = \frac{10}{750} + \frac{1}{2}\left(\frac{50}{750} + \frac{5}{750}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{250}{750} + \frac{25}{750}\right) = \frac{17}{120} \approx 0{,}14$$

Dus 600 is ronder dan 750.
**Opmerkingen**: Ik dacht dat iemand dit uit de duim gezogen had maar deze formule is ‘echt’. Verder eenvoudig rekenwerk, maar wel een heleboel leeswerk.

**2** De rondheid van de hondertallen neem af tussen 500 en 1000. Aan te tonen door te laten zien dat $R(100p) = \frac{23}{16p}$ voor $p = 6, 7, 8, 9$, en te beredeneren dat dit dalend is.
**Uitwerking**: We bepalen $R(100p)$

$$R(100p) = \frac{100}{100p} + \frac{10}{100p} + \frac{1}{2}\left(\frac{50}{100p} + \frac{5}{100p}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{25}{100p}\right) = \frac{575}{400p} = \frac{23}{16p}$$

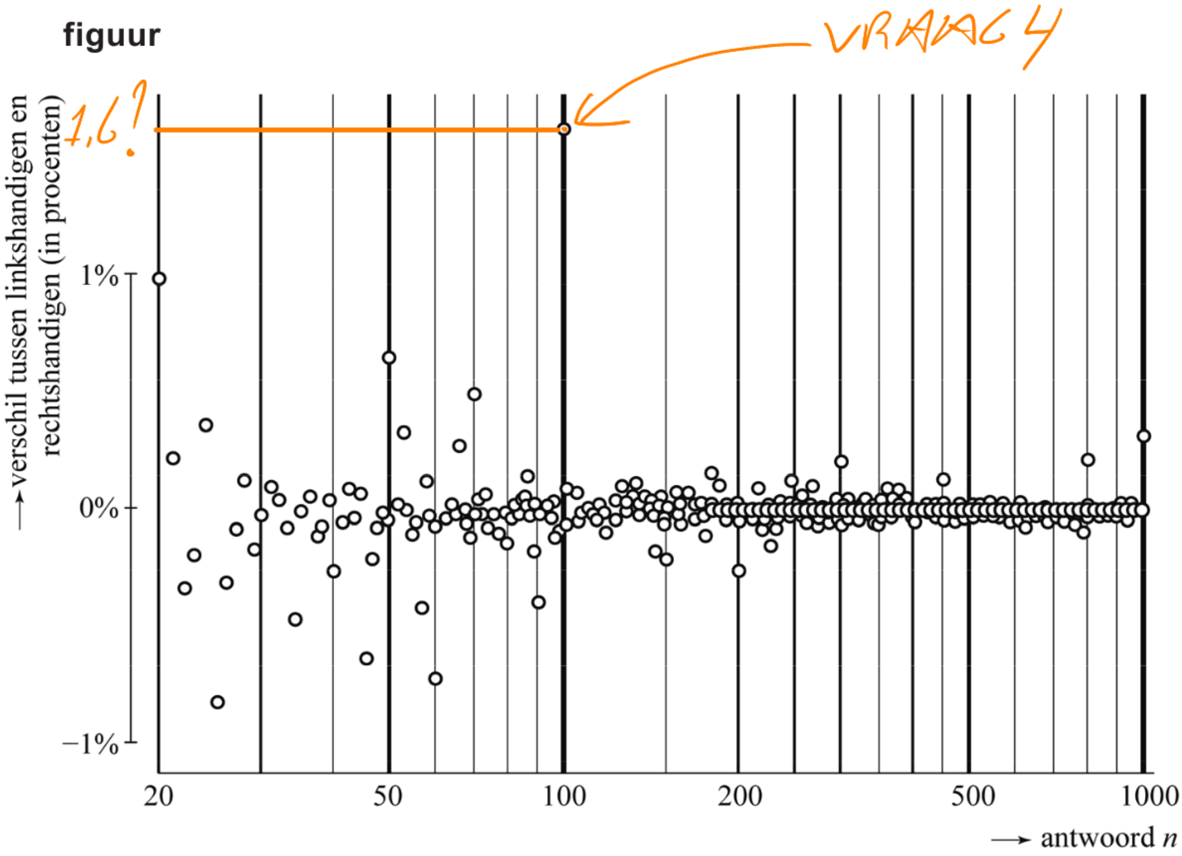
Als, bij vaste teller, de noemer groter wordt wordt de breuk kleiner; daarom neemt de rondheid van de honderdtallen af.
**Opmerkingen**: Ik heb gespiekt in het correctievoorschrift want ik wist niet wat “beredeneer zonder getallen in te vullen of een schets te maken” nog toeliet. Een verkapte oefening in breuken optellen (en in opletten).

**3** De rondheid is ingebed in een verhaal over een onderzoek naar voorkeur voor ronde getallen onder linkshandigen. Een ingewikkeld verhaal leidt tot de vraag welk percentage van 12.000 items overblijft als 1,3% wordt weggestreept, en daarna 3412 en 4329 anders items worden weggehaald.
**Uitwerking**: Die 1,3% van 12.000 geeft $1{,}3 \times 120 = 156$. We moeten dus $12.000 - (156 + 3412 + 4329)$ uitrekenen: 4103 dus. En dat is 34,2% van 12.000.
**Opmerkingen**: Een, in principe, eenvoudig rekensommetje; de moeilijkheid lijkt me het achterhalen van wat uitgerekend moet worden.

In figuur 1 staat het verschil tussen de percentages links- en rechtshandigen die het op de horizontale as noemden in het onderzoek. Bij het getal 20 waren de percentages 6,7 en 5,7, daarom een rondje op hoogte 1% bij het getal 20.

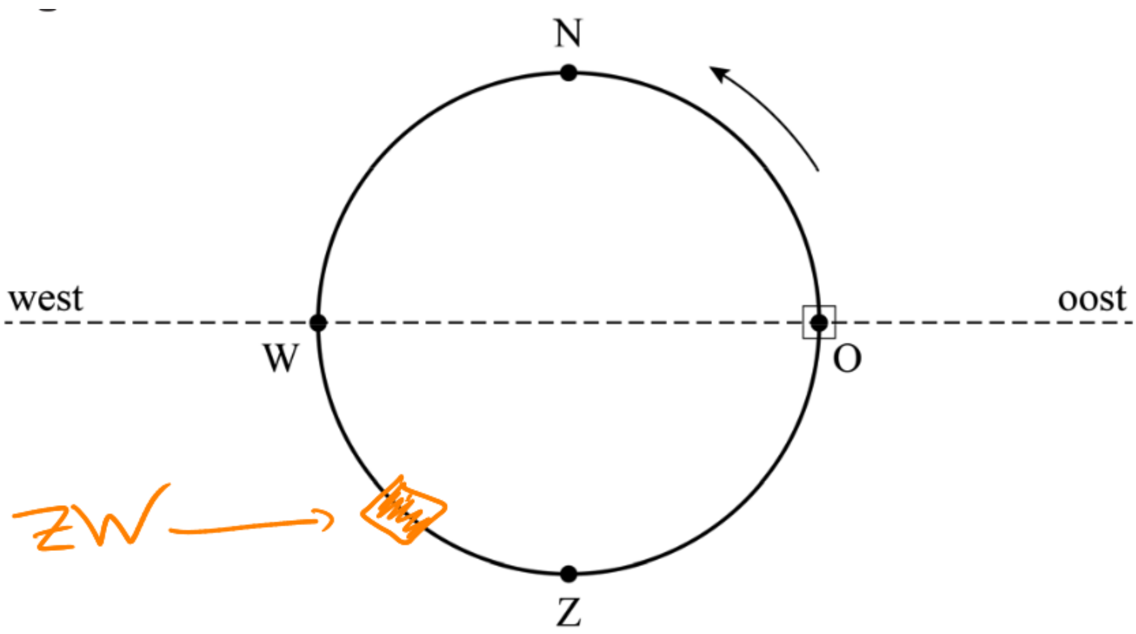
**4** Gegeven: 276 linkshandigen noemden het getal 100. Hoeveel rechtshandigen noemden het getal 100?
**Uitwerking**: Zonder schaalverdeling is het lastig te zien maar het rondje bij $n = 100$ zit op ongeveer hoogte 1,6%. Het percentage linkshandigen was $276/3412 * 100$, dus 8,08%; daar gaat 1,6 van af: dus 6,48% van de rechtshandigen noemde 100. En dat zijn dus $0{,}0648 \times 4329 = 280{,}5192$, afgerond 281.
**Opmerkingen**: Interessante leesoefening. Het rekenwerk is uiteindelijk niet moeilijk.

**5** Volgen de volgende uitspraken uit de figuur?
**Uitwerking**: Uitspraak 1: naarmate getallen groter worden, worden ze minder vaak gekozen. Ik zou zeggen van niet; ik zie voornamelijk dat veel grote getallen even vaak gekozen worden.
Uitspraak 2: Grote getallen worden procentueel bijna even vaak door de linkshandigen als door de rechtshandigen als antwoord gegeven. Dat zou je kunnen concluderen; met een paar uitzonderingen zitten vrijwel alle rondjes op 0% verschil.
**Opmerkingen**: Ik ben wat minder stellig dan het correctievoorschrift, zeker wat betreft uitspraak 2. Als het ‘even vaak’ uit uitspraak 1 heel vaak nul is kunnen de afwijkende rondjes een heel ander verhaal vertellen.




Figuur 1. Verschillen in percentages

**6** Nu komen vier vragen over het draaiende huis in Tilburg van John Körmeling. Het huis maakt één rondreis in 20 uur. Om 08:00 uur is de positie pal oost. Waar is het huis om 20:30 uur op dezelfde dag?
**Uitwerking**: Van 08:00 tot 20:30 is 12,5 uur en $\frac{12{,}5}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Het is dan dus zuid-west.




**Opmerkingen**:

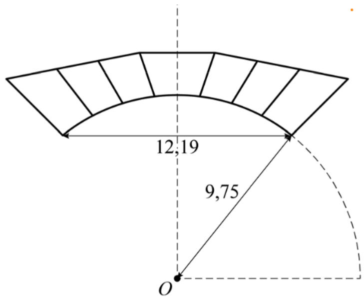
**7** Het was maandag in opgave 6. Na hoeveel hele weken staat het huis weer pal oost om 08:00 op maandag?

**Uitwerking**: Na vijf hele dagen heeft het huis zes hele rondreizen gemaakt en staat dan weer om 08:00 pal oost. Omdat 5 en 7 relatief priem zijn duurt het vijf hele weken om het huis op maandag om 08:00 weer pal oost te krijgen (35 is het kleinste gemene veelvoud van 5 en 7).
**Opmerkingen**: Met wat proberen en schuiven va blokken van 20 uur en blokken van vijf dagen kom je er ook wel.

**8** De verticale positie van het huis ten opzichte van de oost-west as wordt gegeven door $A = 30\sin(\frac{\pi}{10}t)$, met $t$ in uren (en pal oost als $t = 0$, dus noord is positief). Als we op $t = 0$ pal noord willen staan krijgen we $A = 30\sin(\frac{\pi}{10}(t-d))$. Wat is $d$?
**Uitwerking**: We moeten zorgen dat $30\sin(\frac{\pi}{10}(0-d)) = 30$, ofwel $-\frac{d\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$. Dus $d = -5$ (eventueel plus een geheel aantal malen 20).
**Opmerkingen**: Tsja, wel veel tekst om $\sin x = 1$ op te laten lossen.

**9** Hoeveel procent van de tijd is het huis minder dan 15 meter van de oost-westas?
**Uitwerking**: Met andere woorden: voor welke $t$ geldt $-15 < 30\sin(\frac{\pi}{10}t) < 15$? En dat komt neer op $-\frac{1}{2} \leqslant \sin(\frac{\pi}{10}t) < \frac{1}{2}$, ofwel $\frac{\pi}{10}t$ zit in vereniging van de intervallen $[0, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi)$, en $(\frac{11}{6}\pi, 2\pi]$. Vertaald naar $t$ zelf worden dat $[0, \frac{10}{6})$, $(\frac{50}{6}, \frac{70}{6})$, en $\frac{110}{6}, 20]$, met een totale lengte van $\frac{40}{6}$ uur. Dat gedeeld door 20 levert $\frac{1}{3}$, ofwel 33% (afgerond).
**Opmerkingen**: Bijna twee pagina's tekst voor wat eigenlijk vier eenvoudige goniometrieopgaven zijn.

Een paar vraagstukken gebaseerd op de Mathematical Bridge in Cambridge. De details staan in deze tekening:




De straal van de (denkbeeldige) cirkel waar de brug op ligt is dus 9,75 m.

**10** Toon aan dat de halve boog beschreven wordt door de vergelijking $y = \sqrt{95{,}0625 - x^2}$.
**Uitwerking**: Er geldt $9{,}75^2 = 95{,}0625$ de cirkel wordt beschreven door $x^2 + y^2 = 95{,}0625$, dus die formule klopt (want we bekijken de bovenste helft).
**Opmerkingen**: Wat toetst dit?

**11** Bepaal het hoogteverschil tussen de onderkant van de brug en het hoogste punt op de cirkelboog.
**Uitwerking**: De afstand tussen de koorde en de top dus. De halve koorde is de helft van 12,19 meter lang. Noem hoogte van de koorde even $y$. Dan geldt $y = \sqrt{95{,}0625 - 6{,}095^2} \approx 7{,}61$. De gevraagde hoogte is dus $9{,}75 - 7{,}61 = 2{,}14$ m, ofwel 214 cm.
**Opmerkingen**: Invuloefening

**12** De raaklijn in $(-1{,}90, 9{,}56)$ aan de cirkel is op een foto van de brug geplakt. Bepaal $y'(-1{,}90)$ en geef aan wat die waarde praktisch betekent.
**Uitwerking**: Differentiëren:

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{95{,}0625 - x^2}} = -\frac{x}{y(x)}$$

dus $y'(-1{,}90) = \frac{1{,}90}{y(-1{,}90)} = \frac{1{,}90}{9{,}56} \approx 0{,}1987$.
Deze waarde geeft de helling van de brug op het eerste stuk aan: ongeveer 0,2, of een helling van 20%.
**Opmerkingen**: Ik begon te twijfelen bij die 'praktische betekenis'; is er nog iets anders dan de helling?

**13** Een verhaal over prijzenpotten van computerspelcompetities leidt tot exponetiële groei. In 2009 was er 3,7 miljoen te verdienen, in 2016 was dat 95,1 miljoen. Wanneer gaat dit over de 1 miljard heen?
**Uitwerking**: Als we 2009 als jaar nul nemen ziet onze functie er uit als $p(t) = 3{,}7g^t$, met $t$ in jaren en $g$ de groeifactor. Er geldt $p(7) = 97{,}1$, dus $g^7 = \frac{95{,}1}{3{,}7}$ en dan $g \approx 1{,}59$. Nu oplossen $p(t) \geqslant 1000$, of

$g^t \geqslant \frac{1000}{3{,}7}$. Dat wordt $t \ln g \geqslant \ln(1000) - \ln(3{,}7)$ en

$$t \geqslant \frac{\ln(1000) - \ln(3{,}7)}{\ln 1{,}59} \approx 12{,}07$$

Dus na iets meer dan 12 jaar na 2009, dat is 2021 (of 2022).
**Opmerkingen**: Standaard, zou ik zeggen.

**14** Na een verhaaltje komen we op het kiezen van een team voor een spel. Er zijn 112 karakters (helden): 49 aanvallers, 27 verdedigers en 'anderen'. Een team bestaat uit 2 aanvallers, 1 verdediger, en 2 anderen. Hoeveel teams zijn er samen te stellen?
**Uitwerking**: Er zijn 36 anderen. Het aantal manieren is

$$\binom{49}{2} \cdot \binom{27}{1} \cdot \binom{36}{2} = \frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 48 \cdot 27 \cdot \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 35 = 20.003.760$$

**Opmerkingen**: Niet moeilijk, het verhaal bevatte veel niet ter zake doende informatie.

**15** De helden in een team kunnen labels krijgen: $N$, $M$, $Zu$, en $Zw$. Hoeveel labelingen zijn er voor een team als er zeker een $N$, een $M$, en een $Zu$ opgeplakt moeten worden? NB wie welk label krijg is niet belangrijk, alleen de aantallen moeten gehaald worden.
**Uitwerking**: Drie mogelijkheden: 1. geen $Zw$: dus vijf ononderscheidbare ballen in drie dozen, met in elke doos een bal; dat gaat op $\binom{4}{2} = 6$ manieren.
2. één $Zw$: vier ballen; $\binom{3}{2} = 3$ manieren
3. twee $Zw$-en: drie ballen; 1 manier
In totaal 10 manieren.
**Opmerkingen**: Er zijn vele wegen die naar Rome leiden. Geen slechte vraag.

**16** Een lang verhaal leidt tot $P = 8{,}157 \cdot \ln(0{,}1(t + 10)) + 1{,}6$. Hierbij $P$ in miljoenen dollars, $t$ in dagen. Verder wordt een kwart van investeringen aan $P$ toegevoegd. Wanneer overschrijden de investeringen de 40 miljoen?
**Uitwerking**: Die 40 miljoen vertaalt zich in een stijging van $P$ van 10 miljoen. Aangezien we met 1,6 begonnen is de vraag: wanneer geldt $P(t) \geqslant 11{,}6$? Dus op te lossen: $8{,}157 \ln(1 + 0{,}1t) = 10$. Dat wordt $\ln(1 + 0.1t) = \frac{10}{8{,}157}$ of $1 + 0.1t = \exp(\frac{10}{8{,}157}) \approx 3{,}407370$. Dat geeft $t \approx 24{,}07$.
**Opmerkingen**: Veel geklets en die formule had op veel andere dingen kunnen slaan.

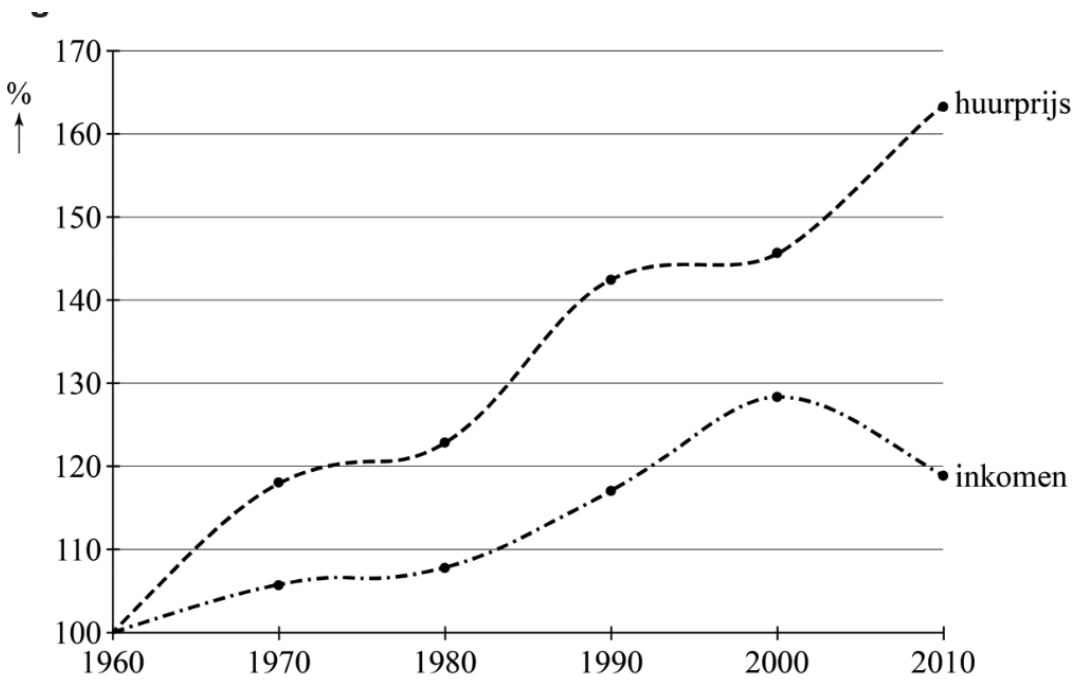
**17** De functie $P$ benadert een wat grilliger kromme. Hoeveel keer zo groot is de toename, 1,125 miljoen, op 30 juni dan $P$ voorspelt?
**Uitwerking**: Er geldt $P'(t) = \frac{8{,}157}{10}(1 + 0.1t)^{-1}$ en op 30 juni geldt $t = 45$. Invullen:

$$P'(45) = \frac{0{,}8157}{1 + 4.5} \approx 0{,}1483$$

Dat zou een aangroei van 0,15 miljoen betekenen. Delen: $1{,}125/0{,}15 = 7{,}5$. (Afronden heeft invloed: $1{,}125/0{,}1483 = 7{,}586$, en $1{,}125/0{,}14 = 8{,}036$.)
**Opmerkingen**: Goede vraag, maar het verhaal is eigenlijk ballast.

**18** Huren in New York tussen 1970 en 2013 met 3,95% jaarlijkse inflatie. In 1970 was de huur \$125, in 2013 was het \$917 (per maand). Wat is de reële huurstijging.
**Uitwerking**: De huren zouden met de inflatie in jaar $1970 + t$ gelijk zijn geweest aan $125 \cdot 1{,}0395^t$. In 2013 zou dat $125 \cdot 1{,}0395^{43} = 661$ dollar geweest zijn. Het absolute verschil is $917 - 661 = 256$ dollar, in procenten is dat $100 \cdot \frac{256}{661}$ procent, of 38,7%.
**Opmerkingen**: Redelijke vraag.

**19** De huurlast was 15% in 1960 en 21% in 2013. Uitgaande van exponentiële groei: wanneer gaat dit over de 25%?
**Uitwerking**: De groeifactor is dus $\frac{21}{15} = \frac{7}{5}$ over 53 jaar. Per jaar is dat $(\frac{7}{5})^{\frac{1}{53}} \approx 1{,}00637$. Nu $15 \cdot 1{,}00637^t = 25$ oplossen: $t \ln 1{,}00637 = \ln 5 - \ln 3$, dus $t \approx 80{,}44$. Gerekend vanaf 1960 is dat rond 2040 dus.
**Opmerkingen**:




FIGUUR 2. Huurprijs en inkomen

**20** Twee uitspraken: 1. In de periode 1960–1980 steeg de huurprijs sneller dan in de periode 1980–2000. 2. In de periode 1990–2000 daalde de huurlast.

Toets de uitspraken aan de grafiek in figuur 2.

**Uitwerking**: 1. Op het oog liggen de punten voor 1960, 1980, en 2000 op één lijn; gelijke stijging dus. 2. Op het oog klopt dit: duidelijke stijging van inkomen van 1990 tot 2000, en een vrij vlakke huurprijs.

**Opmerkingen**:

**21** Een ontzettend lang verhaal leidt tot een vraag over inkomensongelijkheid. De vraag is of het verschil tussen inkomensongelijkheid bij het primair inkomen en dat bij het secundair inkomen meer of minder dan 30.000 Euro is.

**Uitwerking**: In groep 10 was het primaire inkomen 51.955 Euro, in groep 1 was dat 0. De primaire inkomensongelijkheid is dus 51.955.

Het secundaire inkomen in groep 1 is gelijk aan $16 \cdot 784/1138 = 11{,}022$, in duizend Euro, dus 11.022 Euro.

Er ging 76 per huishouden af in groep 10; dat leidt tot een persoonlijke teruggang van $76 * 776/2535 = 23{,}265$ (duizend Euro). Blijft over: $51.955 - 23.265 = 28.690$ Euro in groep 10.

Het secundaire inkomensverschil is dus 17.668 Euro.

Het verschil tussen de verschillen is $51.955 - 17.668 = 34.287$ en dat is meer dan 30.000.

**Opmerkingen**: Twee bladzijde proza en tabellen voor wat uiteindelijk een gewone rekensom is. Ik moest twee keer lezen voor ik zag dat het om het verschil van de verschillen ging. Het hielp niet dat de ene letter $S$ voor beide verschillen gebruikt werd: “de $S$ bij het primaire inkomen”.