EINDEXAMEN WISKUNDE B, 2017, HERKANSING

1 Bepaal exact de positie van minimum van $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$.
Uitwerking: Dit komt neer op het minimaliseren van $u + u^{-2}$ voor $u > 0$ (met $u = 2^x$). De afgeleide is $1 - 2u^{-3}$ en die is gelijk aan 0 voor $u = \sqrt[3]{2}$. Dat leidt tot $x = \frac{1}{3}$.
Opmerkingen: Zonder substitutie leidt differentiëren en vereenvoudigen tot $2^{3x} = 2$, met dezelfde uitkomst.

2 Bereken k zó dat $2k = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Uitwerking: De integraal is gelijk aan

$$\left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^{-2x}}{2\ln 2}\right]_{-1}^{1} = \frac{27}{8\ln 2}$$

Dus $k = \frac{27}{16\ln 2}$.
Opmerkingen: De vraag was wat aangekleed met oppervlakten maar leidt uiteindelijk tot de vergelijking hierboven.

3 Voor de betekenis van de letters in opgaven 3, 4 en 5 zie het plaatje in het examen. Driehoeken ACD en PCB zijn gelijkvormig¿
Uitwerking: We hebben al: $\angle ACD = \angle PCB$.
Voorts: $\angle PBC + \angle ABC = \pi$ (gestrekte hoek) en $\angle ADC + \angle ABC = \pi$ (overstaande hoeken in een koordenvierhoek). Dus ook $\angle PBC = \angle ADC$.
Dit volstaat wegens het hhh-criterium.

4 Driehoeken BCD en PCA zijn gelijkvormig.
Uitwerking: Ten eerste: $\angle PCA = \angle PCB + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA = \angle BCD$.
Ten tweede: $\angle PAC = \angle BAC = \angle BDC$ wegens 'hoeken tegenover een koorde'.
Dus zijn we klaar wegens het hhh-criterium.

5 Maak het bewijs van de Stelling van Prolemaeus af, gegeven twee gevolgen van de gelijkvormigheden, namelijk $AP \cdot CD = AC \cdot BD$ en $BP \cdot CD = CB \cdot AD$.
Uitwerking: Begin met $AC \cdot BD$, die is gelijk aan $AP \cdot CD$ (eerste gegeven), en $AP = AB + BP$ dus komt er $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BP \cdot CD$. Met het tweede gegeven wordt dat $AB \cdot CD + CB \cdot AD$.
Opmerkingen: Deze drie opgaven waren niet echt moeilijk; een beetje hoeken jagen.

6 Uit twee verbanden, $v_0^2 + 2gh_0 = v^2 + 2gh$ en $r^2 v = r_0^2 v_0$, moet een formule voor r in termen van de rest afgeleid worden)en $x = h_0 - h$).
Uitwerking: Via $x = h_0 - h$ volgt uit de eerste betrekking dat $v^2 = v_0^2 + 2gx$ of $v = \sqrt{v_0^2 + 2gx}$.
Stop dit in de tweede betrekking:

$$r^2 = r_0^2 \frac{v_0}{v} = r_0^2 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}}$$

of

$$r = r_0 \frac{v_0}{\sqrt[4]{v_0^2 + 2gx}} = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}}$$

alles en iedereen is positief verondersteld, dus worteltrekken kan naar hartelust.
Opmerkingen: Eenvoudige algebra.

7 Met $r_0 = 0{,}01$, $h_0 = 0{,}3$, $v_0 = 0{,}5$, en $g = 9{,}81$ moet het volume van het wentellichaam van de grafiek van r, voor $0 \le x \le 0{,}3$ berekend worden.
Uitwerking: We stellen het invullen even uit want met de letters primitiveert het wat makkelijker. We moeten $\pi \int_0^{0,3} r^2(x)\,\mathrm{d}x$ berekenen en dat wordt

$$\pi \int_0^{0,3} r_0^2 \cdot v_0 \cdot (v_0^2 + 2gx)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \pi r_0^2 \cdot v_0 \left[\frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gx}\right]_0^{0,3} = \pi \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g}\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}g} - \frac{1}{2}\right)$$

Dit is alles in m^3, het antwoord moet op hele cm^3 afgerond worden. (Er komt $0{,}00003165763179\,\mathrm{m}^3$, dat is $31{,}65\,\mathrm{cm}^3$, afgerond $32\,\mathrm{cm}^3$ dus.)
Opmerkingen: Deze integraal kan zonder meer 'gewoon' uitgerekend worden; ik vind de modeluitwerking, met alle constanten ingevuld, een stuk minder overzichtelijk.

8 Gevraagd: de oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafieken van $\sin x$ en $\sin^2 x$ met $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Uitwerking: Integreren:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \left[-\cos x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(via $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ natuurlijk).
Opmerkingen: Niet moeilijk.

9 Gevraagd de maximale waarde van $\sin x - \sin^2 x$ voor $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Uitwerking: Als eerder kan men $u = \sin x$ substitueren en $u - u^2$ maximaliseren. Symmetrie, of kwadraat afsplitsen, of differentiëren, geeft een maximum van $\frac{1}{4}$ bij $u = \frac{1}{2}$ ofwel bij $x = \frac{\pi}{6}$.
Opmerkingen: De functie zelf differentiëren kan natuurlijk ook.

10 De vraag is de wet van Arrhenius

$$k = A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{E}{8{,}314T}}$$

om te bouwen tot

$$E = 8{,}314T \cdot \ln \frac{A}{k}$$

Uitwerking: Dat is eenvoudige algebra: er geldt $-\frac{E}{8{,}314T} = \ln \frac{k}{A}$ ofwel $\frac{E}{8{,}314T} = \ln \frac{A}{k}$. Vermenigvuldig nu met $8{,}314T$.

11 Uit twee gegevens, namelijk $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ als $T = 500$, en $k = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$ als $T = 550$ moet E bepaald worden.
Uitwerking: De gegevens leiden tot twee vergelijkingen: $E = 8{,}314 \cdot 500(\ln A - \ln(2{,}7 \cdot 10^{-2})$ en $E = 8{,}314 \cdot 550(\ln A - \ln(2{,}4 \cdot 10^{-1})$.
Vermenigvuldig de eerste met 11 en de tweede met 10 en trek af, er komt

$$E = 8{,}314 \cdot 5500(\ln 0{,}24 - \ln 0{,}027)$$

Nu nog met een rekenmachien schrijven als $a \cdot 10^5$, met a tot op één decimaal nauwkeurig. (Dat wordt $99904{,}44369 \approx 100.000$.)
Opmerkingen: Ik vind de 'modeloplossingen' nogal bewerkelijk. Vooral de eerste: die begint met de twee rechterleden aan elkaar gelijk te stellen waardoor de gezochte onbekende, E, uit het zicht verdwijnt.

12 Bewijs dat de raaklijn aan de eenheidscirkel in $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ de lijn $y = -1$ snijdt bij $x = (1+\sin\alpha)/\cos\alpha$.
Uitwerking: Het snelst gaat dit met de normaalvergelijking van die raaklijn:

$$\cos\alpha(x - \cos\alpha) + \sin\alpha(y - \sin\alpha) = 0.$$

Vul $y = -1$ in en werk uit: $x\cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha = 0$, dus $x\cos\alpha = 1 + \sin\alpha$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, de modeloplossing is een heel gedoe; eerst met $\sin\alpha$ vermenigvuldigen spaart heel wat tijd.

13 We hebben $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q = -\cos\alpha, \sin\alpha)$, $A = (0, -1)$ en S is het snijpunt uit de vorige opgave. Er is een α waarvoor PQ en AS even lang zijn. Bepaal de omtrek van $PQAS$ voor die α.
Uitwerking: De lengte van PQ is gelijk aan $2\cos\alpha$, de lengte van AS is $(1 + \sin\alpha)/\cos\alpha$.
Gelijkstellen: $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\alpha$ of $2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$. Ontbinden: $(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha + 1) = 0$. Dus $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ want $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
Invullen: $P = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $Q = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $S = (\sqrt{3}, -1)$. Allevier lengten zijn gelijk aan $\sqrt{3}$, het totaal is dus $4\sqrt{3}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

14 Zie het examenblad voor de tekening en de betekenis van de letters. Te bewijzen $AMSC$ is een koordenvierhoek.
Uitwerking: Omdat M en S op de middelloodlijn van A en B liggen geldt $\angle AMS = \angle BMS$. En omdat M het middelpunt van de omgeschreven cirkel is geldt $MA = MB = MC$ en dus $\angle MCS = \angle MCB = \angle MBC = \angle MBS$.
Via een gestrekte hoek volgt $\angle MSC = \angle BMS + \angle MBS$ en dus $\angle MSC = \angle AMS + \angle MCS$. Tel links en rechts $\angle MAC$ op: $\angle MAC + \angle MSC = \angle MAC + \angle MCS + \angle AMS$.
Maar $\angle MAC = \angle MCA$ en dus $\angle MAC + \angle MCS = \angle ACS$. We vinden

$$\angle MAC + \angle MSC = \angle ACS + \angle AMS.$$

Dat impliceert dat we een koordenvierhoek hebben: linker-en rechterlid zijn even groot en samen 2π, dus elk gelijk aan π.
Opmerkingen: Niet moeilijk, weer wat hoeken jagen. Mijn oplossing staat niet bij de modellen.