EINDEXAMEN WISKUNDE B, 2017

1 De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \ln x$ en $g(x) = \frac{1}{2\mathrm{e}}x^2$.

Ga na met exacte berekening of de grafieken van f en g elkaar raken.

Uitwerking: In een potentieel raakpunt (a, b) geldt $b = \ln a = \frac{1}{2\mathrm{e}}a^2$ en $f'(a) = g'(a)$. De laatste gelijkheid leidt tot de vergelijking $\frac{1}{a} = \frac{2a}{2\mathrm{e}}$, na omschrijven wordt dat $a^2 = \mathrm{e}$, met oplossing $a = \sqrt{\mathrm{e}}$ (immers $a > 0$ omdat het domein van f alleen positieve getallen bevat).
Verder geldt $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{1}{2}$ en ook $g(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$; we zien dat de grafieken elkaar inderdaad raken, en wel in het punt $(\sqrt{\mathrm{e}}, \frac{1}{2})$.
Opmerkingen: Een standaardsom.

2 Gevraagd: hoeveel procent van de tijd heeft de functie U gegeven door $U(t) = 325\sin(100\pi t)$ functiewaarden in absolute waarde groter dan 230.
Uitwerking: Het volstaat naar een halve periode van de functie te kijken en, na schaling volstaat het de lengte van het interval $\{x : 0 \le x \le \pi \text{ en } 325\sin x \ge 230\}$ te bepalen en die door π te delen. Het interval heeft eindpunten $\arcsin\frac{46}{65}$ en $\pi - \arcsin\frac{46}{65}$, dus de lengte is $\pi - 2\arcsin\frac{46}{65}$. De relatieve lengte is dan

$$1 - \frac{2\arcsin\frac{46}{65}}{\pi}$$

en dat kan met een rekenmachientje benaderd worden en omgewerkt tot een percentage: ongeveer 49,94%.
Men kan $\arcsin\frac{46}{65}$ ook benaderen door de rekenmachine de vergelijking $\sin x = \frac{46}{65}$ numeriek op te laten lossen.
Opmerkingen: Wel erg veel 'context' voor wat niet veel meer is dan het oplossen van een vergelijking van de vorm $\sin t = a$. In de officiële uitwerking wordt $\sin 100\pi t = \frac{46}{65}$ bij benadering opgelost; dat kan onnauwkeurigheden opleveren door de kleine periode van de functie.

3 Gevraagd wordt het getal U_{eff} te bepalen (tot op twee decimalen) dat voldoet aan

$$T \cdot U_{\text{eff}}^2 = \int_0^T U(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

hierin is T de (fundamentele) periode van U.
Uitwerking: Bereken de integraal, met gebruikmaking van $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$:

$$\int_0^T U(t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{325^2}{2}\int_0^T 1 - \cos(200\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{325^2}{2}T$$

want $\int_0^T \cos(200\pi t)\,\mathrm{d}t = 0$ omdat T een periode van $\cos 200\pi t$ is.
We zien dat $U_{\text{eff}}^2 = \frac{325^2}{2}$ ofwel $U_{\text{eff}} = \frac{325}{2}\sqrt{2}$. Een rekenmachientje geeft de gewenste benadering: 229,81.
Opmerkingen: Een gewone integraalsom.

4 Bereken de maximale waarde van $325\bigl(\sin 100\pi t - \sin(100\pi t - \frac{2}{3}\pi)\bigr)$
Uitwerking: Met behulp van een gionoformule is de uitdrukking om te werken tot

$$325 \cdot 2\sin\tfrac{1}{3}\pi \cdot \cos(100\pi t + \tfrac{1}{3}\pi) = 325\sqrt{3}\cos(100\pi t + \tfrac{1}{3}\pi)$$

Hieruit is de maximale waarde meteen af te lezen: $325\sqrt{3}$.
Opmerkingen: Een toepassing van een gonioformule; het hele verhaal over wisselstroom dat om opgaven 2, 3, en 4 geweven is spreekt mij niet aan en vertelt veel meer dan nodig is voor het maken van de sommen.

5 Zie de examenopgaven voor de tekst en het plaatje waarin de punten benoemd worden.
Uitwerking: De raaklijn in C aan de cirkel is parallel aan de koorde AB; immers, de loodlijn uit C op AB deelt AB middendoor en dus gaat die loodlijn door M. De raaklijn en AB staat loodrecht op CM. Laat K het snijpunt van die raaklijn met AD zijn. Dan geldt $\angle KCA = \angle CAB$, wegens 'Z-hoeken'. De vierhoek $MAKC$ is een vlieger want $MA = MC$ en de hoeken $\angle MAK$ en $\angle MCK$ zijn beide recht. We zien dat $CK = KA$, dus driehoek AKC is gelijkbenig, en dus $\angle CAD = \angle ACK = \angle CAB$.
Opmerkingen: Een aardige som met een niet al te ingewikkelde oplossing.

6 Zie de examenopgaven voor de tekst en het plaatje waarin de punten benoemd worden.
Uitwerking: We moeten laten zien dat de vierhoek $AGFE$ een koordenvierhoek is.
Om te beginnen, wegens de stelling van Thales volgt dat $\angle DAC = \angle DFC$. Verder weten we nog dat $\angle DAC = \angle GAE$. Er volgt

$$\angle GAE + \angle GFE = \angle DFC + \angle GFE$$

de laatste hoek is een gestrekte hoek dus $\angle GAE + \angle GFE = \pi$.
En dit volstaat om te zien dat $AGFE$ een koordenvierhoek is.
Opmerkingen: Net als de vorige opgave: aardig, niet al te moeilijk.

7 De functies f en g zijn op het interval $[0, \frac{2}{3}\pi]$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ en $g(x) = \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$. Er geldt $f(0) - g(0) = 0$, en $f(\frac{2}{3}\pi) - g(\frac{2}{3}\pi) = 0$, en $f(x) > g(x)$ op $(0, \frac{2}{3}\pi)$ (zie tekening bij opgave). Gevraagd voor welke p in $[0, \frac{2}{3}\pi]$ het verschil $f(p) - g(p)$ maximaal is.
Uitwerking: Differentieer $f(x)-g(x)$: er komt $\cos(2x-\frac{2}{3}\pi)-\cos(x-\frac{2}{3}\pi)$. Dus $\cos(2x-\frac{2}{3}\pi) = \cos(x-\frac{2}{3}\pi)$ oplossen met $x \in (0, \frac{2}{3}\pi)$. Dan geldt $-\frac{2}{3}\pi < x - \frac{2}{3}\pi < 0$ en $-\frac{2}{3}\pi < 2x - \frac{2}{3}\pi < \frac{2}{3}\pi$, dus de mogelijkheden zijn: 1) $x - \frac{2}{3}\pi = 2x - \frac{2}{3}\pi$ met oplossing $x = 0$ (die voldoet niet); en 2) $x - \frac{2}{3}\pi = -2x + \frac{2}{3}\pi$ met oplossing $x = \frac{4}{9}\pi$.
Er geldt $f'(\frac{1}{3}\pi) - g'(\frac{1}{3}\pi) = \cos 0 - \cos\frac{1}{3}\pi > 0$ en $f'(\frac{2}{3}\pi) - g'(\frac{2}{3}\pi) = \cos\frac{2}{3}\pi - \cos 0 < 0$, dus $f(\frac{4}{9}\pi) - g(\frac{4}{9}\pi)$ is inderdaad maximaal.
Opmerkingen: Niet al te moeilijk maar er is al wel veel voorgegeven.

8 Op $[0, \pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 3\sin x - 2\sin^2 x$. Gevraagd de afstand tussen de twee oplossingen van $f(x) = 1$ ongelijk aan $\frac{1}{2}\pi$.
Uitwerking: De vergelijking $f(x) = 1$ wordt $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; het linkerlid is te ontbinden als $(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$. De mogelijkheden zijn dus $\sin x = 1$, maar dat geeft $x = \frac{1}{2}\pi$. We moeten dus $2\sin x = 1$ oplossen, in $[0, \pi]$ krijgen we $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$, met als onderlinge afstand $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

9 Bepaal de oppervlakte van het vlakdeel onder de grafiek van f (en boven de x-as).
Uitwerking: Dit is de waarde van de integraal $\int_0^\pi 3\sin x - 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Overgang op dubbele hoek geeft

$$\int_0^\pi 3\sin x - 1 + \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[-3\cos x - x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = (3 - \pi + 0) - (-3 - 0 + 0) = 6 - \pi$$

10 Gevraagd wordt a en b zó te bepalen dat voor de functie g, gegeven door $g(x) = ax^2 + bx$, geldt: $(\pi, 0)$ ligt op de grafiek van g, dus $g(\pi) = 0$; zowel in $(0,0)$ als in $(\pi, 0)$ hebben de grafieken van f en g dezelfde helling.
Uitwerking: De eerste eis komt neer op $a\pi^2 + b\pi = 0$ en de tweede eis leidt tot $f'(0) = g'(0)$ en $f'(\pi) = g'(\pi)$.
Er geldt $g'(0) = b$ en $f'(0) = 3\cos 0 - 4\sin 0 \cdot \cos 0 = 3$, dus volgt $b = 3$.
Dit invullen in $a\pi^2 + b\pi = 0$, geeft $a\pi^2 = -3\pi$ en dus $a = -\frac{3}{\pi}$.
Ter controle: $g'(\pi) = 2a\pi + b = -\frac{6}{\pi} \cdot \pi + 3 = -3$ en $f'(\pi) = 3\cos\pi - 4\sin\pi \cdot \cos\pi = -3$, dus aan de eis bij $(\pi, 0)$ is ook voldaan.
Opmerkingen: Opgaven 8, 9, en 10 zijn best aardig. Bij opgave 10 hoeft, in de officiële uitwerking, niet geverifieerd te worden dat a en b ook aan de derde voorwaarde in $(\pi, 0)$ voldoen, omdat de opgave al garandeert dat er een oplossing is. Dat zou ik in het midden gelaten hebben.

11 Gevraagd wordt de maximale waarde van $T_{\text{nat}}(t) = 20 + 1050\mathrm{e}^{-\ln^2 t + 6\ln t - 9}$ te bepalen.
Uitwerking: Men kan de functie differentiëren maar het is wat eenvoudiger eerst op te merken dat $T_{\text{nat}}(t)$ maximaal is precies daar waar de exponent $-\ln^2 t + 6\ln t - 9$ maximaal is. Deze exponent is gelijk aan $-(\ln t - 3)^2$ en hieraan is meteen te zien dat de exponent maximum waarde 0 heeft als $\ln t = 3$, ofwel $t = \mathrm{e}^3$. De bijbehorende maximale waarde van T_{nat} is dan $20 + 1050 = 1070$.
Opmerkingen: Een wat ingewikkelde manier om de top van een parabool op te sporen.

12 Gevraagd wordt te bepalen voor welke t de uitdrukking $T_{\text{lab}}(t) = 20 + 345\log(8t + 1)$ gelijk is aan 300, algebraïsch en afgerond op drie decimalen.
Uitwerking: Gelijkstellen aan 300 geeft $20 + 345\log(8t + 1) = 300$ ofwel $345\log(8t + 1) = 280$. Delen door 345 geeft $\log(8t + 1) = \frac{56}{69}$ en dus $8t + 1 = 10^{\frac{56}{69}}$. De oplossing wordt $t_0 = (10^{\frac{56}{69}} - 1)/8$. Een rekenmachientje maakt hier 0,6850358050 van, afgerond op drie decimalen is dat 0,685.
Opmerkingen: Is er verschil tussen algebraïsch berekenen en exact berekenen?

13 Deze opgave gaat uit van de waarde $O = \int_{t_0}^{30} T_{\mathrm{lab}}(t) - 300\,\mathrm{d}t$ en vraagt een uitspraak te doen over het tijdstip t_b gedefinieerd door de eis dat de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van T_{nat}, de lijn $T = 300$, en de lijn $t = t_b$ gelijk is aan O. De vraag is of t_b groter dan of gelijk is aan 30.

Uitwerking: De waarde O is exact te berekenen, via een primitieve van $\log(8t + 1)$, maar dat wordt wat bewerkelijk. De bedoeling lijkt de integraal numeriek te benaderen, met (be)hulp van Maple vond ik dat $O \approx 11929{,}29300$.

Vervolgens moeten we bepalen waar $T_{\mathrm{nat}}(t) = 300$. Dat kan exact via $\ln t = 3 \pm \sqrt{\ln 15 - \ln 4}$. De kleinste oplossing is $t_0 = \exp(3 - \sqrt{\ln 15 - \ln 4}) \approx 6{,}361877851$. We moeten $I = \int_{t_0}^{30} T_{\mathrm{nat}}(t) - 300\,\mathrm{d}t$ zeker numeriek aanpakken want T_{nat} is niet in termen van elementaire functies te primitiveren. Als $I < O$ dan kunnen we concluderen dat $t_b > 30$, en omgekeerd uit $I > O$ volgt dat $t_b < 30$. Maple geeft $I \approx 14241{,}80371$; dat is duidelijk veel groter dan O, dus we mogen concluderen dat $t_b < 30$.

Opmerkingen: Bij opgaven 11, 22, en 13 was er weer wel veel leeswerk voor men tot een vraag kwam.

14 Zie het examenblad voor de tekening. In een parallellogram $ABCD$ wordt AC verdubbeld tot AE. Te bewijzen: C is het zwaartepunt van de driehoek DBE.

Uitwerking: De diagonalen in het parallellogram snijden elkaar middendoor, laat M het snijpunt zijn. Dan is M het midden van DB en dus is EM de zwaartelijn uit E op DB en C verdeelt die lijn in de verhouding $MC : CE = 1 : 2$. Maar het zwaartepunt van DBE verdeelt elke zwaartelijn in die verhouding, dus C is het zwaartepunt.

Opmerkingen: Niet moeilijk, je moet wel weten dat zwaartelijnen elkaar in de verhouding 1 : 2 snijden.