EINDEXAMEN WISKUNDE B, 2018-05-14

1 Een punt P beweegt volgens $x(t) = 1 - t^2$ en $y(t) = (1+t)^2$. De baan van P snijdt de y-as in de oorsprong en in het punt A. Bereken exact de snelheid waarmee P door het punt A gaat.
Uitwerking: Er geldt $x(t) = 0$ voor $t = -1$ en $t = 1$. Bij $t = -1$ gaat P door de oorsprong; bij $t = 1$ dus door het punt A. En A is dan $(0,4)$. Verder geldt $x'(1) = -2$ en $y'(1) = 4$. Dus de snelheid op tijdstip 1 is $\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.
Opmerkingen: Een standaardsom.

2 Te bewijzen P doorloopt de kromme met vergelijking $(x+y)^2 = 4y$.
Uitwerking: Vul in: $x(t) + y(t) = 1 - t^2 + 1 + 2t + t^2 = 2 + 2t$ en dus $(x+y)^2 = 4(1+t)^2 = 4y$.
Opmerkingen: Simpele algebra.

3 Bewijs dat, voor elke a, de unieke top van de functie f_a, gegeven door $f_a(x) = x\mathrm{e}^{ax}$ op de lijn ℓ met vergelijking $y = x/\mathrm{e}$ ligt.
Uitwerking: Er geldt $f_a'(x) = (1+ax)\mathrm{e}^{ax}$, de afgeleide heeft één nulpunt: $x = -1/a$. Dat moet dan de (gegeven) top opleveren. En inderdaad, $f_a(-\frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}$, en het het punt $(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a\mathrm{e}})$ ligt op de gegeven lijn.
Opmerkingen: Aan de afgeleide is al te zien dat f_a ten hoogste één top heeft en ook dat het teken van f_a' bij dat ene nulpunt omklapt. Op deze manier vraagt de vraag weinig inzicht

4 Bewijs dat F_a, gegeven door

$$F_a(x) = \frac{1}{a}x\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}$$

een primitieve van f_a is.
Uitwerking: Differentiëren

$$F_a'(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + x\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} = x\mathrm{e}^{ax}$$

Opmerkingen: Niet bijzonder

5 Bepaal de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de lijn ℓ en de grafiek van f_1.
Uitwerking: Eerst de snijpunten bepalen: $f_1(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}x$ levert $(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^x)x = 0$, met oplossingen $x = -1$ en $x = 0$. Tussen de twee oplossingen geldt $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ en dus $f_1(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-1}$ (want $x \leqslant 0$); dit mag ook uit het gegeven plaatje worden afgelezen. De oppervlakte is dus

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\mathrm{e}}x - x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2\mathrm{e}}x^2 - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0} = 1 - \left(\frac{1}{2\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 - \frac{5}{2\mathrm{e}}$$

dankzij de vorige opgave.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

6 De cirkel om $M = (14,8)$ met straal 10 snijdt de x-as in twee punten A en B, waarbij $x_A < x_B$. Bepaal het zwwaartepunt van drie puntmassa's, massa 3 in A, massa 1 in B, en massa 2 in M.
Uitwerking: Eerst A en B bepalen. De vergelijking van de cirkel is $(x-14)^2 + (y-8)^2 = 100$; stel $y = 0$, dan komt er $(x-14)^2 = 100 - 64 = 36$. Dus $x = 14 \pm 6$ en daarmee $x_A = 8$ en $x_B = 20$.
Nu het zwaartepunt:

$$\frac{1}{3+1+2}(3A + B + 2M) = \frac{1}{6}\big((24,0) + (20,0) + (28,16)\big) = \frac{1}{6}(72,16)$$

Het zwaartepunt is dus $(12, \frac{8}{3})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

7 En cirkel raakt de y-as in de oorsprong en ook de hierboven gegeven cirkel. Bepaal de straal d van die cirkel
Uitwerking: Het middelpunt van de cirkel is $(d,0)$, wegens de eerste eis. De tweede eis zegt dat de afstand tussen M en $(d,0)$ gelijk is aan $10 + d$. Uitschrijven: $(d-14)^2 + 8^2 = (10+d)^2$, of $d^2 - 28d + 196 + 64 = 100 + 20d + d^2$ en dus $160 = 48d$. We vinden $d = \frac{160}{48} = \frac{10}{3}$.
Opmerkingen: Even doorhebben dat $(d,0)$ het middelpunt is, daarna makkelijk.

8 Bepaal exact de locaties van de toppen van f, gegeven door $f(x) = 6\sin x - \cos 2x$.
Uitwerking: Differentieer: $f'(x) = 6\cos x + 2\sin 2x = 6\cos x + 4\sin x\cos x = (6+4\sin x)\cos x$. Omdat $6 + 4\sin x \geqslant 2$ zijn de nulpunten van f' precies de nulpunten van $\cos x$, en het tekenverloop van f' is dat van $\cos x$. Dus f heeft maxima voor alle x van de vorm $2k\pi + \frac{1}{2}\pi$ met k geheel, de y-waarde is daar $6 + 1 = 7$; de minima treden op als $x = 2k\pi - \frac{1}{2}\pi$ met k geheel en y-waarde gelijk aan $-6 + 1 = -5$.
Opmerkingen: Dit is in principe niet moeilijk, aangenomen dat men zich realiseert dat $6+4\sin x$ altijd positief is.

9 Gegeven is dat de grafiek van f symmetrisch is rond de lijn $x = \frac{3}{2}\pi$. Boven de top $(\frac{3}{2}\pi, -5)$ wordt tussen twee punten op de grafiek een horizontaal lijnstuk van lengte 2 gelegd, gevraagd wordt de hoogte van dat lijnstuk boven de gegeven top te bepalen.
Uitwerking: Dat lijnstuk ligt, wegens de gegeven symmetrie, op hoogte $f(\frac{3}{2}\pi - 1)$ — en dat is dus ook $f(\frac{3}{2}\pi + 1)$. Die functiewaarde is gelijk aan $-6\cos 1 + \cos 2$. De gevraagde hoogte is dus $-6\cos 1 + \cos 2 - (-5) = 5 - 6\cos 1 + \cos 2$. Afgerond op twee decimalen is dat 1.34.
Opmerkingen: Niet duidelijk wat hiet getest wordt; functiewaarde uitrekenen?

10 Onderwerp van deze en de volgende vraag is (een deel van) de grafiek van de functie f_k, gegeven door

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}(\mathrm{e}^{kx} + \mathrm{e}^{-kx})$$

(ofwel $f_k(x) = \frac{1}{k}\cosh kx$) een kettinglijn dus. We nemen het deel tussen twee punten, P en Q, op gelijke hoogte. De lengte van dat gedeelte noemen we l, en het verschil in hoogte tussen P en Q enerzijds en de top T anderzijds noemen we d. De top T ligt op de y-as en P en Q liggen symmetrisch ten opzichte van de y-as. Verder is gegeven dat k, d en l voldoen aan

$$k = \frac{8d}{l^2 - 4d^2} \tag{$*$}$$

In een figuur is de situatie getekend met $k = 0.7$, $x_P = -3$ en $x_Q = 3$

Voor deze situatie moeten we de lengte l bepalen, afgerond op twee decimalen.
Uitwerking: In dit geval hebben we dus $k = 0.7$ en $d = f_k(x_P) - f_k(0)$. Verder kunnen we de gegeven betrekking $(*)$ ombouwen tot

$$l^2 = \frac{8d + 4kd^2}{k}$$

Nu is het een kwestie van (juist) invullen in een rekenmachien. Maple gaf mij $l \approx 11.49101926$.
Opmerkingen: Een rare som: de kettinglijn is eigenlijk een afleider. Hij is nodig om d te bepalen maar het echte werk is l in k en d uitdrukken. Mijn grootste probleem zou zijn de juiste knoppen in de juiste volgorde indrukken.

11 Uitgaande van het ontwerp van een kas in de Sheffield Winter Garden wordt gevraagd een functievoorschrift voor een omgekeerde kettinglijn te geven. Deze moet 49.63 meter lang zijn en 20.51 meter hoog.
Uitwerking: We zoeken dus een k zó dat de grafiek van f_k op zijn kop gezet de gevraagde boog oplevert. Hierbij kunnen we direct betrekking $(*)$ gebruiken, we hebben immers $l = 49.63$ en $d = 20.51$:

$$k = \frac{8d}{l^2 - 4d^2} \approx 0.2102251579$$

Nu moeten we f_k omklappen, $-f_k$ nemen dus, en dan optillen tot de punten P en Q op de x-as liggen of de top op hoogte 20.51. Er geldt $-f_k(0) = -\frac{1}{k} \approx -4.76$; om dat op de juiste hoogte te krijgen moet daar $20.51 + 4.76 = 25.27$ bij; het voorschrift wordt dus

$$h(x) = 25.27 - \frac{1}{0.42}(\mathrm{e}^{0.21x} + \mathrm{e}^{-0.21x})$$

Opmerkingen: Niet echt diepzinnig, vooral weer de juiste knoppen indrukken.

12 Bewijs dat e^{2x} de inverse functie is van $\ln\sqrt{x}$.
Uitwerking: Ik zou zeggen: vul in, en gebruik dat $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$. Ten eerste: $\mathrm{e}^{2\cdot\frac{1}{2}\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x} = x$ want ln is de inverse van de e-macht, en ten tweede: $\frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$.
Opmerkingen: Het kan zijn dat men iets als $x = \ln\sqrt{y}$ wil laten oplossen maar de *definitie* van inverse zegt dat $f^{\mathrm{inv}}(f(x)) = x$ en $f(f^{\mathrm{inv}}(x)) = x$ moeten gelden.
Het correctievoorschriftopstellers kennen de definitie dus niet.

13 Vervolgens wordt de inverse, e^{2x} dus, met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Gevraagd wordt dan het minimum van $g(x) - \ln\sqrt{x}$ te bepalen (voor $x > 0$ uiteraard). De vraag zelf gebruikt veel meer woorden, maar dit is de kern.
Uitwerking: Differentieer het verschil: $e^{2x} - \frac{1}{2x}$. Dit gelijk aan nul stellen geeft een transcendente vergelijking, $e^{2x} = \frac{1}{2x}$, en die wordt waarschijnlijk met een of andere 'SOLVE'-knop opgelost.
Maple geeft mij $x = 0.2835716452$ als oplossing. Dat invullen in $\frac{1}{2}e^{2x} - \ln\sqrt{x}$ geeft 1.511756652, afgerond op drie decimalen is dat 1.512.
Opmerkingen: Er was gegeven dat er een minimum is; het enige nulpunt van de afgeleide levert dat dan op. Maar omdat e^{2x} stijgt en $\frac{1}{2x}$ daalt is het tekenverloop van de afgeleide makkelijk te bepalen en is *aantonen* dat het een minimum is niet echt moeilijk.

14 Vervolgens moeten de coördinaten van de perforatie in de grafiek van

$$\frac{\ln\sqrt{x}}{\ln x}$$

bepaald worden (rechts van de y-as uiteraard).
Uitwerking: Voor $x = 1$ is deze functie niet gedefinieerd, voor alle andere positieve x is het quotiënt gelijk aan $\frac{1}{2}$. De perforatie zit dus in het punt $(1, \frac{1}{2})$.
Opmerkingen: Voor wie niet weet of door heeft dat $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$ is dit allemaal nogal bewerkelijk.

15 Onder de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ wordt een vierkant getekend met zijden evenwijdig aan de assen, één hoekpunt in $(1, 0)$ en een ander hoekpunt op de grafiek. Bereken de lengte van de zijde(n) van het vierkant.
Uitwerking: We noemen de lengte van de zijden x, dan is $(1 + x, 0)$ het tweede hoekpunt op de x-as. De functiewaarde daar is $\frac{1}{1+x}$, maar die moet gelijk zijn aan de zijdelengte, aan x dus. Immers, $\frac{1}{1+x}$ is kleiner dan 1, dus het verticale lijntje van $(1 + x, 0)$ naar $(1 + x, \frac{1}{1+x})$ moet een zijde zijn. Oplossen: $\frac{1}{1+x} = x$ geeft $x^2 + x = 1$, of $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$, en dus $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Omdat $x > 0$ moeten we $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ hebben.
Opmerkingen: Wel aardig.

16 Op het kwart van de eenheidscirkel tussen $A = (1, 0)$ en $B = (0, 1)$ nemen we een punt C, met coördinaten $(\cos t, \sin t)$. Op beide lijnstukken AC en BC zetten we een vierkant. De oppervlakte van het eerste is twee keer zo groot als het tweede. Bereken t.
Uitwerking: We moeten dus zorgen dat $|AC|^2 = 2|BC|^2$. Schrijf uit:

$$(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(\cos^2 t + (1 - \sin t)^2)$$

Na uitwerken en wegstrepen houden we

$$1 - \cos t = 2 - 2\sin t$$

over. Deze gaat niet 'makkelijk'; Maple hielp met $t \approx 0.9272952180$.
Opmerkingen: Ik hoop dat de leerlingen de vereenvoudiging hebben gedaan; de eerste vergelijking invoeren lijkt me vervelend.

17 Het tweede vierkant is gelabeld $BCFG$ (tegen de klok in. Gevraagd wordt te bewijzen dat de plaatsvector van F gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} 1 - \sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

Uitwerking: Gebruik dat $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF}$ en dat $\overrightarrow{CF}$ gelijk is aan $\overrightarrow{CB}$ geroteerd over $-\frac{\pi}{2}$. Er geldt $\overrightarrow{CB} = \binom{-\cos t}{1-\sin t}$, dus $\overrightarrow{CF} = \binom{1-\sin t}{\cos t}$. Tel dit bij $\overrightarrow{OC}$ op en je krijgt het gewenste resultaat.
Opmerkingen: Aardig, even nadenken hoe je aan $\overrightarrow{CF}$ komt.

Relatie ($*$) uit opgave 10

Ik kende de gegeven relatie ($*$) uit opgave 10 en 11 niet.

Die gaan we dus even afleiden.

De punten P en Q hebben tegengestelde x-coördinaten en dezelfde y-coördinaten. De y-coördinaat is gelijk aan $1+d$ want d is het verschil tussen $f_k(x_P)$ en $f_k(0)$, en $f_k(0)=\frac{1}{k}$. We weten dus dat

$$\frac{1}{k}\cosh(k\cdot x_P)=\frac{1}{k}+d$$

De lengte van de boog is

$$\int_{x_P}^{x_Q}\sqrt{1+f_k'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Maar: $f_k'(x)=\sinh kx$ en $1+\sinh^2 kx=\cosh^2 kx$, dus de integraal wordt

$$\int_{x_P}^{x_Q}\cosh kx\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{k}\sinh kx\right]_{x_P}^{x_Q}=\frac{2}{k}\sinh kx_Q$$

We zien: $l=\frac{1}{k}\sinh x_Q$ en $d=\frac{1}{k}\cosh kx_Q-1\frac{1}{k}$. Dus

$$l^2-4d^2=\frac{4}{k^2}\sinh^2 kx_Q-\frac{4}{k^2}\cosh^2 kx_Q+\frac{8}{k^2}\cosh kx_Q-\frac{4}{k^2}=\frac{8}{k^2}\cosh kx_Q-\frac{8}{k^2}=\frac{8}{k}\cdot d$$

en dat geeft ($*$).