EINDEXAMEN WISKUNDE B PILOT, 2017

1 De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \ln x$ en $g(x) = \frac{1}{2e}x^2$.

Ga na met exacte berekening of de grafieken van f en g elkaar raken.

Uitwerking: In een potentieel raakpunt (a, b) geldt $b = \ln a = \frac{1}{2e}a^2$ en $f'(a) = g'(a)$. De laatste gelijkheid leidt tot de vergelijking $\frac{1}{a} = \frac{2a}{2e}$, na omschrijven wordt dat $a^2 = e$, met oplossing $a = \sqrt{e}$ (immers $a > 0$ omdat het domein van f alleen positieve getallen bevat).
Verder geldt $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ en ook $g(\sqrt{e}) = \frac{e}{2e} = \frac{1}{2}$; we zien dat de grafieken elkaar inderdaad raken, en wel in het punt $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.
Opmerkingen: Een standaardsom. Deze staat ook op het reguliere eindexamen wiskunde B. Joost Hulshof merkt terecht op dat de grafieken elkaar ook zouden kunnen kruisen, zoals de grafiek van $y = x^3$ en de x-as. Een blik op de tweede afgeleiden leert dan g convex is en f concaaf; van kruising is dus geen sprake.

2 Gegeven de lijn k met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Men voert de volgende operatie uit op punten in het platte vlak: construeer uit P het punt Q door bij de plaatsvector $\overrightarrow{OP}$ over $\frac{1}{2}\pi$ te roteren (positief) en de zo verkregen vector $\overrightarrow{OP'}$ bij $\overrightarrow{OP}$ op te tellen.

De vraag is de vergelijking van de lijn m, het beeld van k onder deze transformatie te bepalen.

Uitwerking: Als de coördinaten van $P = (x, y)$ dan geldt $P' = (-y, x)$ en dus $Q = (x - y, x + y)$. Schrijven we $u = x - y$ en $v = x + y$ dan moeten we dus een vergelijking maken waar u en v aan voldoen als $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Je kunt oplossen: $x = \frac{1}{2}(u + v)$ en $y = \frac{1}{2}(-u + v)$. Invullen in $y = -\frac{1}{2}x + 3$ geeft $-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = -\frac{1}{4}u - \frac{1}{2}v + 3$. Omwerken en opknappen levert $-u + 3v = 12$, of $v = \frac{1}{3}u + 4$.
Opmerkingen: Er zijn alternatieven: het correctievoorschrift transformeert een parametrisering van de lijn en bouwt die om tot een vergelijking, en geeft de mogelijkheid twee punten te transformeren en dan de lijn door die twee beeldpunten te bepalen. Die laatste mogelijkheid gebruikt achter de schermen de lineariteit van de transformatie.

3 Gegeven twee cirkels: c_1 om $M_1 = (-2, 0)$ met straal 2, en c_2 om $M_2 = (6, 0)$ met straal 6. Voor elke $r > 0$ is $c_3(r)$ de cirkel met straal r die de beide cirkels raakt en wiens middelpunt $M_3(r)$ boven de x-as ligt.

Bewijs:

$$\cos \angle M_1M_2M_3 = \frac{r + 12}{2r + 12}$$

Uitwerking: Gebruik de cosinusregel (en noem de hoek even θ):

$$M_1M_3^2 = M_2M_1^1 + M_2M_3^2 - 2 \cdot M_2M_1 \cdot M_2M_3 \cos\theta$$

dit wordt $(r + 2)^2 = 8^2 + (r + 6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (r + 6)\cos\theta$. Uitwerken geeft $16(r + 6)\cos\theta = 8r + 96$; delen door $16(r + 6)$ geeft het gewenste resultaat.
Opmerkingen: Aardige som.

4 Bepaal de limiet van de hoek $\angle M_1M_2M_3$ voor r naar oneindig.
Uitwerking: De limiet van de cosinus is

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r + 12}{2r + 12} = \lim_{r\to\infty} \frac{1 + \frac{12}{r}}{2 + \frac{12}{r}} = \frac{1}{2}$$

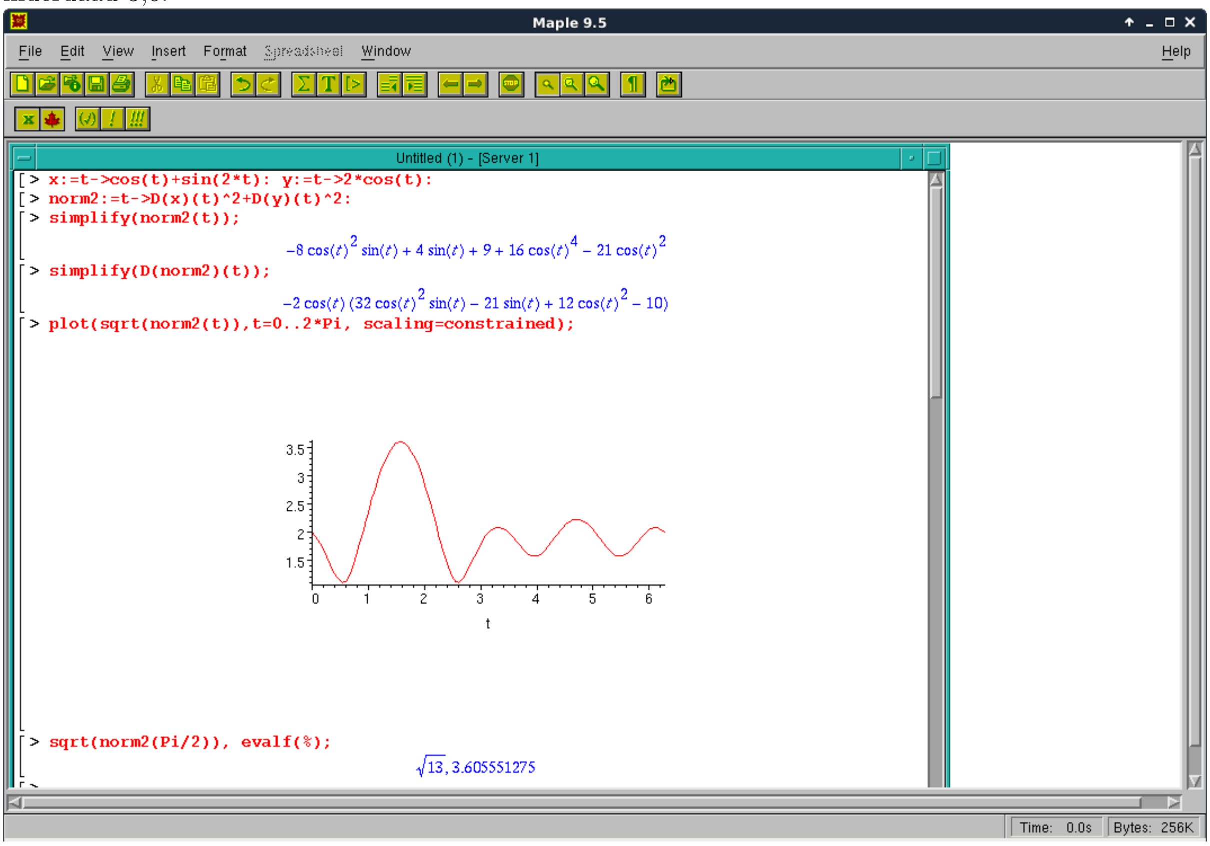
Dus de cosinus van de limiethoek is $\frac{1}{2}$, die hoek is dus gelijk aan $\frac{\pi}{3}$ of 60°.
Opmerkingen: Kennelijk mag stilzwijgend aangenomen worden dat de inverse van de cosinus continu is.
Volgens het correctievoorschrift mag men ook "12 verwaarlozen voor grote r". Dat gaat hier goed maar in het algemeen lijkt me dit niet aan te raden.

5 Bepaal de unieke r waarvoor de cirkel $c_3(r)$ ook de x-as raakt.
Uitwerking: In dit geval geldt $M_3(r) = (x, r)$ waarbij $P = (x, 0)$ het punt is waar $c_3(r)$ de x-as raakt. De hoek $\angle M_2PM_3$ is recht, pas de stelling van Pythagoras toe:

$$r^2 + (6 - x)^2 = (r + 6)^2$$

Ook geldt
$$\frac{6-x}{6+r} = \cos\theta = \frac{r+12}{2(r+6)}$$
en dus $6 - x = \frac{1}{2}(r+12)$. Stop dit in de eerste vergelijking:
$$r^2 + \frac{1}{4}(r+12)^2 = (r+6)^2$$
Na uitwerken en wegstrepen komt men uit op $r^2 - 24r = 0$. Dus $r = 0$ of $r = 24$, de eerste voldoet duidelijk niet, dus $r = 24$ blijft over. De bijbehorende waarde van x is dan -12.
Opmerkingen: Mooie som.

6 Onderzoek van de kromme gegeven door $x(t) = \cos t + \sin 2t$ en $y(t) = 2\cos t$ met $0 \le t \le 2\pi$. De parametrisering $(x(t), y(t))$ beschrijft de baan van een punt P, gevraagd de maximale snelheid van P te bepalen, afgerond op één decimaal.
Uitwerking: De snelheidsvector is gegeven door $v(t) = (-\sin t + 2\sin t\cos t, -2\sin t)$. De grootte van de snelheid, de vaart, is de norm van die vector, dat is dus $\sqrt{(-\sin t + 2\sin t\cos t)^2 + 4\sin^2 t}$. Een plot van deze functie leert dat het maximum ongeveer 3,6 is.
Opmerkingen: Ik het de afgeleide van het kwadraat van de norm bepaald en die zag er niet fraai uit; het feit dat er om een afgerond antwoord werd gevraagd liet mij naar een plot kijken. Niet bevredigend. Een blik op de vereenvoudigde afgeleide leert dat deze nul is in $t = \frac{1}{2}\pi$ en aan de plot is te zien dat daar het maximum zit; op deze manier kun je vinden dat het maximum gelijk is aan $\sqrt{13}$, en dat is afgerond inderdaad 3,6.



Het correctievoorschrift geeft een punt voor “beschrijven hoe het maximum kan worden bepaald” zonder voorbeeld van een geldige duidelijkmaking te geven. Een aanvulling op het voorschrift schenkt alle leerlingen de twee punten voor “de beschrijving” en het uiteindelijke antwoord.

7 De punten A en B zijn de snijpunten van de kromme met de lijn $y = x$, *ongelijk aan de oorsprong*, met A in het eerste kwadrant en B in het derde. Bepaal hoe lang de beweging van A naar B kost.
Uitwerking: We lossen op $x(t) = y(t)$, of $\cos t + \sin 2t = 2\cos t$. Hier maken we $\sin 2t - \cos t = 0$ van of $(2\sin t - 1)\cos t = 0$. De oplossingen voor t komen dus van $\cos t = 0$ of $\sin t = \frac{1}{2}$. We vinden: $t = \frac{1}{2}\pi$ (oorpsrong), $t = \frac{3}{2}\pi$ (oorpsrong), $t = \frac{\pi}{6}$ (geeft $A = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$), en $t = \frac{5}{6}\pi$ $(geeftB = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}))$. Het duurt dus $\frac{2}{3}\pi$ tijdseenheden om van A naar B te komen.

Opmerkingen: Aardige goniosom.

8 Men laat een punt Q ook de kromme doorlopen maar dan π eenheden vóór op P. De punten kunnen samenvallen, in de oorsprong, maar anders bepalen ze een lijnstuk. Aan te tonen: de helling van PQ is constant.
Uitwerking: De positie van Q is gegeven door $(\cos(t+\pi)+\sin 2(t+\pi), 2\cos(t+\pi))$, ofwel door $(-\cos t+\sin 2t, -2\cos t)$. Dus

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-2\cos t\\ -4\cos t\end{pmatrix} = \cos t\begin{pmatrix}-2\\ -4\end{pmatrix}$$

en dat is altijd een veelvoud van dezelfde vector; de helling is die van de vector $(-2,-4)^T$.
Opmerkingen: Aardig.

9 Gegeven de functie f door $f(x) = 5/(4x-6)$ en de lijk k met vergelijking $y = x - \frac{7}{2}$. Gegeven is dat $A = (1, -\frac{5}{2})$ één van de twee snijpunten van de grafiek van f en de lijn k is. Te berekenen: de coördinaten van het andere snijpunt, B.
Uitwerking: Stel gelijk: $x-\frac{7}{2} = 5/(4x-6)$ of $(2x-7)/2 = (5/(2x-3))/2$. Kruislings vermenigvuldigen: $(2x-7)(2x-3) = 5$, omwerken tot $4x^2 - 29x + 16 = 0$, en dan ontbinden: $4(x-1)(x-4) = 0$. De oplossingen zijn $x = 1$ en $x = 4$; de eerste geeft ons A, de tweede geeft ons $B = (4, \frac{1}{2})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, slechts een kwadratische vergelijking. Ik vraag me af wat deze vraag hier doet: dit zou op examenniveau eigenlijk een stap op weg naar iets anders moeten zijn.

10 Het vlakdeel V wordt omsloten door de grafiek van f, de lijn k, de x-as, en de y-as. Bepaal de inhoud van het lichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.
Uitwerking: Het vlakdeel V bestaat uit twee delen: V_1, bepaald door $0 \le x \le 1$ en $f(x) \le y \le 0$, en V_2, bepaald door $1 \le x \le \frac{7}{2}$ en $x - \frac{7}{2} \le y \le 0$. Het volume van het wentellichaam van V is de som van de volumina van de wentellichamen van V_1 en V_2 en dus gelijk aan

$$\pi\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^{\frac{7}{2}}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{-25}{4(4x-6)}\right]_0^1 + \pi\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)^3\right]_1^{\frac{7}{2}} = \frac{25}{12}\pi + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3\pi = \frac{175}{24}\pi$$

Opmerkingen: Vermoedelijk is A bij de vorige vraag al gegeven om bij deze vraag de juiste splitsing van V te maken. Het maken van de bij de vraag geleverde figuur zou ik aan de leerling laten. Nu wordt er wel erg veel gestuurd.

11 De functie g wordt verkregen door een getal a bij f op te tellen. De grafiek van f wordt dus omhoog (als $a > 0$) of omlaag (als $a < 0$) geschoven. De grafiek van de inverse functie van g heeft één verticale asymptoot, net als de grafiek van g zelf. Die asymptoten liggen 4 uit elkaar. Bereken a.
Uitwerking: De verticale asymptoot van g ligt bij $x = \frac{3}{2}$, net als die van f.
De verticale asymptoot van g^{-1} ligt bij $x = a$; immers, bij inverteren worden horizontale en verticale asymptoten omgewisseld en de horizontale asymptoot van g is gegeven door $y = a$, want het is die van f, de x-as, a eenheden opgeschoven.
Conclusie: a moet voldoen aan $|a - \frac{3}{2}| = 4$. De mogelijk waarden van a zijn dus $\frac{11}{2}$ en $-\frac{5}{2}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, nadat het idee van horizontaal en verticaal omwisselen er is.

12 Gevraagd wordt de maximale waarde van $T_{\text{nat}}(t) = 20 + 1050\mathrm{e}^{-\ln^2 t + 6\ln t - 9}$ te bepalen.
Uitwerking: Men kan de functie differentiëren maar het is wat eenvoudiger eerst op te merken dat $T_{\text{nat}}(t)$ maximaal is precies daar waar de exponent $-\ln^2 t + 6\ln t - 9$ maximaal is. Deze exponent is gelijk aan $-(\ln t - 3)^2$ en hieraan is meteen te zien dat de exponent maximum waarde 0 heeft als $\ln t = 3$, ofwel $t = \mathrm{e}^3$. De bijbehorende maximale waarde van T_{nat} is dan $20 + 1050 = 1070$.
Opmerkingen: Een wat ingewikkelde manier om de top van een parabool op te sporen.

13 Gevraagd wordt te bepalen voor welke t de uitdrukking $T_{\text{lab}}(t) = 20 + 345\log(8t+1)$ gelijk is aan 300, algebraïsch en afgerond op drie decimalen.
Uitwerking: Gelijkstellen aan 300 geeft $20 + 345\log(8t+1) = 300$ ofwel $345\log(8t+1) = 280$. Delen door 345 geeft $\log(8t+1) = \frac{56}{69}$ en dus $8t + 1 = 10^{\frac{56}{69}}$. De oplossing wordt $t_0 = (10^{\frac{56}{69}} - 1)/8$. Een rekenmachientje maakt hier 0,6850358050 van, afgerond op drie decimalen is dat 0,685.
Opmerkingen: Is er verschil tussen algebraïsch berekenen en exact berekenen?

14 Deze opgave gaat uit van de waarde $O = \int_{t_0}^{30} T_{\text{lab}}(t) - 300\,\mathrm{d}t$ en vraagt een uitspraak te doen over het tijdstip t_b gedefinieerd door de eis dat de oppervlakte van het vlakdeel ingestloten door de grafiek van T_{nat}, de lijn $T = 300$, en de lijn $t = t_b$ gelijk is aan O. De vraag is of t_b groter dan of gelijk is aan 30.
Uitwerking: De waarde O is exact te berekenen, via een primitieve van $\log(8t + 1)$, maar dat wordt wat bewerkelijk. De bedoeling lijkt de integraal numeriek te benaderen, met (be)hulp van Maple vond ik dat $O \approx 11929{,}29300$
Vervolgens moeten we bepalen waar $T_{\text{nat}}(t) = 300$. Dat kan exact via $\ln t = 3 \pm \sqrt{\ln 15 - \ln 4}$. De kleinste oplossing is $t_0 = \exp(3 - \sqrt{\ln 15 - \ln 4}) \approx 6{,}361877851$. We moeten $I = \int_{t_0}^{30} T_{\text{nat}}(t) - 300\,\mathrm{d}t$ zeker numeriek aanpakken want T_{nat} is niet in termen van elementaire functies te primitiveren. Als $I < O$ dan kunnen we concluderen dat $t_b > 30$, en omgekeerd uit $I > O$ volgt dat $t_b < 30$. Maple geeft $I \approx 14241{,}80371$; dat is duidelijk veel groter dan O, dus we mogen concluderen dat $t_b < 30$.
Opmerkingen: De laatste drie opgaven staan ook in het gewone Eindexamen wiskunde-B. Deze vergen wel wat leeswerk voor men tot de vraag komt.

15 Gegeven een familie functies f_p, voor $p \neq 0$, door

$$f_p(x) = \frac{px^2 + 4px + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)}$$

Bepaal de unieke waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.
Uitwerking: Een perforatie is waarschijnlijk een punt van de vorm (a, b) met de eigenschap dat $f_p(a)$ niet bestaat, maar $\lim_{x\to a} f(x) = b$.
In het geval van een rationale functie komt dit neer op het weg kunnen delen van $x - a$ uit teller en noemer. De enig mogelijke kandidaat voor a is het getal 2, te zien aan de factor $x - 2$ in de noemer.
We zorgen dus dat de noemer van f_p in 2 de waarde nul aanneemt, dat leidt tot $4p + 8p + 6 = 0$, met oplossing $p = -\frac{1}{2}$. Voor die waarde van p geldt dat

$$f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{2}\frac{(x-2)(x+6)}{(x-2)(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{x+6}{x^2+1} \qquad (x \neq 2)$$

De coördinaten van de perforatie zijn dus $(2, -\frac{4}{5})$.
Opmerkingen: Niet slecht, hier moeten diverse stappen gezet worden zonder verdere duwtjes in de goede richting.