EINDEXAMEN WISKUNDE B, HAVO, 2022-05-13

1 Gevraagd het punt A te bepalen waarin de lijn ℓ met vergelijking $y = 2x + 2$ de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 13$ raakt.
Uitwerking: Dus: $y = 2x+2$ in de vergelijking van c stoppen, uitwerken, en oplossen: $x^2+4x^2+8x+4 = 6x + 12x + 12 - 13$ wordt $5x^2 - 10x + 5 = 0$, of $5(x-1)^2 = 0$. De oplossing: $x = 1$ en $y = 4$, dus $A = (1, 4)$.
Opmerkingen: Alles is al weggegeven, op het rekenwerk na: de lijn raakt dus er komt één oplossing. Verder nadenken is niet nodig.
Overigens: in het correctievoorschrift staat de constructie "Hieruit volgt $A(1, 4)$"; wat is er mis met het =-teken?

2 De lijn snijdt de x- en y-as in respectievelijk S en T; te bewijzen: de cirkel d met middellijn ST gaat door de oorsprong O.
Uitwerking: Dat is duidelijk want $SO \perp TO$, en de stelling van Thales vertelt ons dat O op d ligt.
Opmerkingen: Niet dus: er moest gerekend worden. Jammer.

3 Een heel verhaal over bandbreedte, kanaalcapaciteit, en signaal-ruisverhouding leidt tot twee formules: capaciteit $C = B \cdot {}^2\log(1 + R)$ en $S = 10 \cdot {}^{10}\log R$. Gegeven $B = 20 \cdot 10^6$ en $S = 40$, bepaal C.
Uitwerking: Vul in: ${}^{10}\log R = 4$, dus $R = 10^4$, en $1 + R = 10001$. Daaruit volgt $C = 20 \cdot 10^6 \cdot {}^2\log 10001\,\text{bps}$. Maple maakt daar $0{,}2657571328 \times 10^9$ van, het antwoord moest in miljoenen: $C = 266.000.000\,\text{bps}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

4 Een benaderende formule voor C is $C = 1{,}44 \cdot B \cdot R$. De vraag is: voor welke R wijkt dit ten hoogste 1% af van de echte waarde?
Uitwerking: Dus op te lossen:

$$1{,}44 \cdot B \cdot R - B \cdot {}^2\log(1 + R) \leqslant 0{,}01 \cdot B \cdot {}^2\log(1 + R)$$

of

$$1{,}44 \cdot R \leqslant 1{,}01 \cdot {}^2\log(1 + R)$$

De B is dus niet belangrijk. De bijbehorende gelijkheid heeft $R = 0{,}02387442434$ als oplossing. Op drie decimalen is dat 0,024 (volgens het voorschrift).
Het voorschrift rekent 0,023 ook goed ("geen punten in mindering brengen") maar dat moet eigenlijk andersom: bij $R = 0{,}023$ is de afwijking klein genoeg; bij $R = 0{,}024$ is de afwijking te groot.
Opmerkingen: Er was in een plaatje gegeven dat de benadering groter is dan de echte waarde, vandaar de afwezigheid van absolute waarden.
Verder komt dit neer op knoppen drukken.
Overigens: die magische 1,44 is gewoon $1/\ln 2$, want de gegeven benadering is namelijk de linearisering van ${}^2\log(1 + R)$ rond $R = 0$.

5 Voor grote R geldt $1+R \approx R$ (en zeker $\log(1+R) \approx \log R$, voor alle typen logaritmen). Dus $C \approx B \cdot {}^2\log R$. Aan te tonen dat men nu $C = 0{,}332 \cdot B \cdot S$ kan nemen.
Uitwerking: Dat doen we door ${}^2\log R$ om te zetten naar ${}^{10}\log R$:

$$C = B \cdot {}^2\log R = B \cdot \frac{{}^{10}\log R}{{}^{10}\log 2} = \frac{B}{{}^{10}\log 2} \cdot \frac{S}{10} = \frac{1}{10 \cdot {}^{10}\log 2} \cdot B \cdot S$$

Er geldt $1/(10 \cdot {}^{10}\log 2) \approx 0{,}3321928095$, na afronding geeft dat de magische constante in de formule.
Opmerkingen: Aardige opgave.
Bij alledrie sommen was de achtergrond niet echt belangrijk; de vragen gingen gewoon over logaritmische functies.

6 We hebben $f(x) = -8 + 2\sqrt{3x+9}$ (kennelijk voor $x \geqslant -3$). De raaklijn in het sijpunt A van de grafiek van f en de y-as snijdt de x-as in B. Te bewijzen OA en OB zijn even lang.
Uitwerking: Er geldt $f(0) = -8 + 2\sqrt{9} = -2$, dus $A = (0, -2)$. Verder: $f'(x) = 3(3x+9)^{\frac{-}{1}2}$, dus $f'(0) = 1$. De raaklijn heeft helling 1 en snijdt de x-as dus in $(2, 0)$. De lijnstukken hebben allebei lengte 2.
Opmerkingen: Niet moeilijk. Het voorschrift laat ook meetkunde toe: er ontstaat een gelijkbenige rechthoekige driehoek, klaar.

7 De grafiek van f wordt met een positieve factor a vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as. Zo onstaat de grafiek van een functie g. De afstand tussen het randpunt M van de grafiek van g en het snijpunt C van die grafiek met de x-as is $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$. Wat is a?.
Uitwerking: Er geldt dus $g = a \cdot f$. Dat geeft $M = (-3, -8a)$; het punt C is onafhankelijk van a: om het te vinden moeten we $f(x) = 0$ oplossen: $2\sqrt{3x+9} = 8$, of $3x+9 = 4^2 = 16$, en dus $x = (16-9)/3 = \frac{7}{3}$. We krijgen zo een rechthoekige driehoek met hypothenusa $\frac{20}{3}$ en horizontale rechthoekzijde $\frac{16}{3}$; de verticale heeft lengte $8a$. Met Pythagoras krijgen we

$$(8a)^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \left(\frac{12}{3}\right)^2$$

Dus $8a = 4$ (want $a > 0$) en dus $a = \frac{1}{2}$.
Opmerkingen: Het is te doen, ook als je niet meteen het drietal $(3, 4, 5)$ (of eigenlijk $(12, 16, 20)$) ziet zitten. Geen slechte opgave.

8 Een verhaal over windmolens leidt tot

$$E = \frac{1}{4} \cdot c \cdot v^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{w}{v}\right)^3 - \left(\frac{w}{v}\right)^2 + \left(\frac{w}{v}\right)\right)$$

Hierin is v de windsnelheid vóór de molen, w de windsnelheid achter de molen, c een constante, en E de opgewekte energie (de eenheden kloppen). Gevraagd w te berekenen als $v = 10$, $c = 5116$, en $E = 1{,}21 \times 10^6$.
Uitwerking: Na invullen resulteert de derdegraadsvergelijking

$$1{,}21 \times 10^6 = 1279(1000 - w^3 - 10w^2 + 100w)$$

Na wat knoppen drukken vinden we $w = 6{,}543179049$; in één decimaal als gevraagd: $w = 6{,}5$.
Opmerkingen: Ik zie hier geen wiskundig probleem; het enige lastige lijkt me het correct invoeren van de vergelijking.
Wat is er zo speciaal aan die $\frac{1}{4}$; die kan toch in c gestopt worden? En waarom staan de machten niet op volgorde?

9 Men vervangt $\frac{w}{v}$ door p en vraagt aan te tonen dat E, ongeacht de waarden van c en v, bij $p = \frac{1}{3}$ de maximale waarde bereikt.
Uitwerking: Als we c en v als constanten beschouwen gaat het om de extremen van $1 - p^3 - p^2 + p = (1-p)(1+p)^2$. De afgeleide hiervan is $-(1+p)^2 + 2(1-p)(1+p) = (1+p)(1-3p)$. Het tekenschema laat zien dat de functie stijgt van 0 tot $\frac{1}{3}$ en dan weer daalt. Het maximum van de functie op het interval $[0, 1]$ ligt dus in $\frac{1}{3}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

10 Gevraagd het maximale percentage van de windenergie die de molen uit de wind kan halen; hierbij wordt voor de windenergie de formule $\frac{1}{2} \cdot c \cdot v^3$ gegeven.
Uitwerking: Als de maximaal haalbare energie delen door de windenergie krijgen we

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot c \cdot v^3(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})^2}{\frac{1}{2} \cdot c \cdot v^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{27} = 0{,}5925925926$$

Dat is dus iets meer dan 59%.
Opmerkingen: Eenvoudig rekenwerk. De ontbonden vorm maakt het rekenwerk iets makkelijker, maar niet veel meer.

11 Twee vragen over de functie f, op $(\frac{1}{2}\infty)$ gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Een lijn ℓ met richtingscoëfficient -2 raakt de grafiek van f. Gevraagd het snijpunt van ℓ met de y-as.
Uitwerking: Eerst $f'(x) = -2$ oplossen, dus $\frac{-2}{(2x-1)^2} = -2$, ofwel $(2x-1)^2 = 1$. In ons interval geldt $2x - 1 > 0$, we krijgen $2x - 1 = 1$, of $x = 1$. Het raakpunt is dus $(1, f(1)) = (1, 1)$. Naar de y-as is 1 naar links, en dus 2 omhoog, het snijpunt is $(0, 3)$.
Opmerkingen: Aardige test van afgeleide; het rekenwerk in het voorschrift was uitgebreider.

12 Gevraagd de afstand van de oorsprong tot de grafiek van f.
Uitwerking: De afstand van $(0, 0)$ tot een punt $(x, f(x))$ op de grafiek is gelijk aan $\sqrt{x^2 + f(x)^2}$; we minimaliseren eerst het argument van de wortel: $x^2 + f(x)^2$ (dat rekent makkelijker. De afgeleide is $2x + 2f(x)f'(x)$ en dat is gelijk aan $2x - \frac{2}{(2x-1)^3}$. We moeten dus

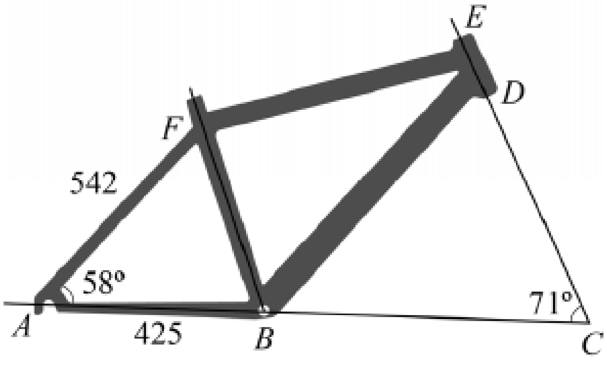
$$x = \frac{1}{(2x-1)^3} \qquad \text{of} \qquad x(2x-1)^3 = 1$$

oplossen. Dit is een vierdegraadsvergelijking, waarvan één oplossing (gelukkig) zo te zien is: vul $x = 1$ maar in. En dat is de enige op het interval $(\frac{1}{2}, \infty)$ want x stijgt daar en $(2x-1)^{-3}$ daalt daar. Verder zien we zo ook dat de afgeleide van de afstand negatief is op $(\frac{1}{2}, 1)$ en positief op $(1, \infty)$. Het minimum treedt dus op bij $x = 1$, in het punt $(1, 1)$ dus. De gevraagde afstand is gelijk aan $\sqrt{2}$.
Opmerkingen: Zo ging het dus niet in het voorschrift: kennelijk moest het minimum door middel van knoppen drukken bepaald worden. De vraagstelling was ook uitgebreider dan ik deed voorkomen: in twee plaatjes werd de situatie met een willekeurig punt A op de grafiek, en zijn projectie op de x-as, getoond, plus de rechthoekige driehoek waarvan we de hypothenusa zochten.

13 Een familie functies op $[0, \infty)$, is gegeven door $f_a(x) = ax^2 - a$ (met $a > 0$). Te 'bewijzen': de grafiek van elke f_a gaat door $(1, 0)$.
Uitwerking: $f_a(1) = a - a = 0$.
Opmerkingen: Deze begrijp ik niet; wat wordt hier getoetst?

14 We bekijken, op hetzelfde domein, ook $g(x) = \sin 2\pi x$. Bepaal de a waarvoor de grafiek van f_a door de eerste top van de grafiek van g gaat die rechts van 1 ligt.
Uitwerking: Die top, T, ligt in $(\frac{5}{4}, 1)$. Immers $g(1) = \sin 2\pi = 0$, dus we moeten x zó nemen dat $2\pi x = \frac{5}{2}\pi$.
Nu a zo bepalen dat $f_a(\frac{5}{4}) = 1$, dus $a(\frac{25}{16} - 1) = 1$, ofwel $a = \frac{9}{16}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

15 Tot slot twee vragen over fietsen. Eerst wat meetkunde aan de hand van het frame.



(lengten in milimeters). Gevraagd het verschil tussen hoeken $\angle ABF$ en $\angle BCE$.
Uitwerking: Eerst de cosinusregel: $BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2 \cdot AB \cdot AF \cdot \cos 58°$. Alles invullen: $BF^2 = 425^2 + 542^2 - 2 \cdot 425 \cdot 542 \cdot \cos 58°$; dit geeft $BF = \sqrt{230255{,}1949} = 479{,}8491376$.
Dan de sinusregel:

$$\frac{\sin 58°}{BF} = \frac{\sin \angle ABF}{542}$$

Invullen en uitwerken: $\sin \angle ABF = 0{,}9578887029$; met behulp van de arcsin-knop: $\angle ABF = 73{,}313206°$. Afgerond op hele graden is het gevraagde verschil dus $73 - 71 = 2$ graden.
Opmerkingen: Een goede goniosom.

16 De tweede vraag gaat over het verband tussen binnenbeenlengte B (van de fietser, in cm) en de cranklengte L (van de fiets, in mm). Het verband is van de vorm $L = a \cdot B^n$.

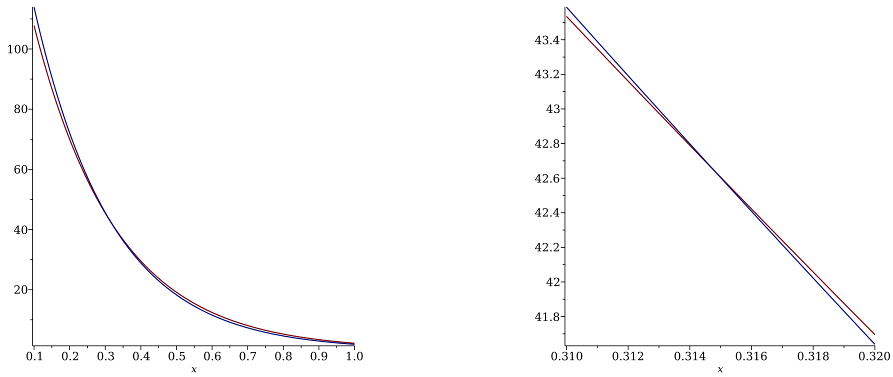
Gegeven is $L = 166$ bij $B = 75$ en $L = 180$ bij $B = 97$. Gevraagd: wat is L als $B = 86$?

Uitwerking: We bepalen a en n, en vullen dan $B = 86$ in. We weten dus dat $166 = a75^n$ en $180 = a97^n$. Neem logaritmen: $\log 166 = \log a + n \log 75$ en $\log 180 = \log a + n \log 97$. Trek de vergelijkingen van elkaar af: $\log 180 - \log 166 = n(\log 97 - \log 75)$ en dus

$$n = \frac{\log 180 - \log 166}{\log 97 - \log 75} = 0{,}31478174$$

Dus $a = 166 \cdot 75^{-n}$ of $a = 180 \cdot 97^{-n}$ nemen; beide geven 42,6454824.
Nu $B = 86$ invullen: $L = 173\,\mathrm{mm}$.

Opmerkingen: Niet moeilijk als je je logaritmen kent.
Echter: het voorschrift gaf twee uitwerkingen waarin vergelijkingen opgelost werden met behulp van knoppen drukken. De weg via $a = 166/75^n = 180/97^n$, en dus het oplossen van $166/75^n = 180/97^n$, liet hier de beperkingen van zien: een aantal rekenmachines verslikte zich in deze vergelijking en gaf uiteindelijk een waarde voor a die praktisch gelijk aan 0 was … dit was aanleiding voor een aanvulling op het correctievoorschrift. Het probleem is te zien als je de grafieken in één figuur tekent. De functies



FIGUUR 1. Grafieken van $166/75^x$ en $180/97^x$ op het interval $[0{,}1, 1]$ en heel dicht bij het snijpunt.

liggen overal heel dicht bij elkaar en bij een verkeerde startwaarde krijgt men een schijnoplossing.
Ik hoop dat deze som in het onderwijs als waarschuwing gebruikt gaat worden.