EINDEXAMEN WISKUNDE B, HAVO, 2023-05-23

1 Gevraagd op exacte wijze het domein van de functie f gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x-5}$ te berekenen.
Uitwerking: Tsja, er moet $3x - 5 \geqslant 0$ gelden, ofwel $x \geqslant \frac{5}{3}$. Het domein is dus het interval $[\frac{5}{3}, \infty)$.
Opmerkingen: Ik dacht dat dit een strikvraag was, zo eenvoudig. Het antwoord in het voorschrift is fout: "$x \geqslant \frac{5}{3}$" is een ongelijkheid, geen verzameling.

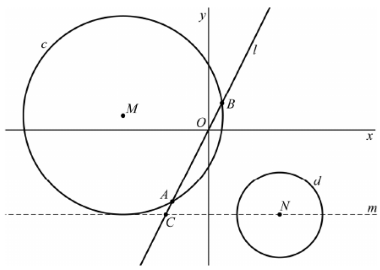
2 Gegeven nog een tweede functie g door $g(x) = a(x-p)^2 + q$, een punt A op de grafiek van f waar geldt $f'(x) = \frac{3}{4}$, en een punt B op de grafiek van f met x-coördinaat 10. Verder is A ook de top van de grafiek van g, en ligt B ook op de grafiek van g.
De getallen a, p, en q moeten exact berekend worden.
Uitwerking: Om te beginnen: $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}(3x-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{3x-5}}$. De vergelijking $f'(x) = \frac{3}{4}$ oplossen geeft $\sqrt{3x-5} = 4$, of $3x - 5 = 16$, en dat leidt tot $x = 7$, en dus $A = (7, 8)$. De top van g ligt bij $x = p$, dus $p = 7$, verder $g(7) = 8$, dus $q = 8$. Tenslotte geldt ook $g(10) = 10$, dus $a(10-7)^2 + 8 = 10$, of $9a = 2$, dus $a = \frac{2}{9}$.
Opmerkingen: Dit is wel een aardige opgave: differentiëren, weten hoe een parabool werkt. In de formulering van de vraag en in het plaatje werden een paar dingen voorgezegd.

3 Te bepalen, algebraïsch, de x-coordinaat van het meest rechtse snijpunt van de cirkel c met vergelijking $(x+6)^2 + (y-1)^2 = 49$, en de lijn ℓ met vergelijking $y = 2x$.
Uitwerking: Invullen en uitwerken: $(x+6)^2 + (2x-1)^2 = 5x^2 + 8x + 37$. Gelijkstellen aan 49 geeft $5x^2 + 8x - 12 = 0$, met de abc-formule krijgen we

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 240}}{10} = -\frac{4}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{19}$$

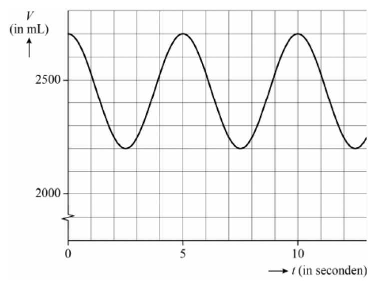
De x-coördinaat van B is dus gelijk aan $-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{19} \approx 0{,}94$ (het moest in twee decimalen).
Opmerkingen: Niet moeilijk; waarom niet gewoon 'exact'?

4 Gegeven nog een tweede lijn m, de horizontale raaklijn aan c onderaan, het snijpunt C van ℓ en m, een punt N op m en 8 eenheden rechts van C, en de cirkel d om N met straal 3.



Gevraagd de afstand tussen de cirkels.
Uitwerking: Dat is dus de afstand tussen M en N minus de som van de stralen: 10. Ten eerste: m is gegeven door $y = -6$. Ten tweede: C is dus gelijk aan $(-3, -6)$, en dus $N = (5, -6)$. De afstand van M tot N is dus $\sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$. Antwoord: $\sqrt{170} - 10$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

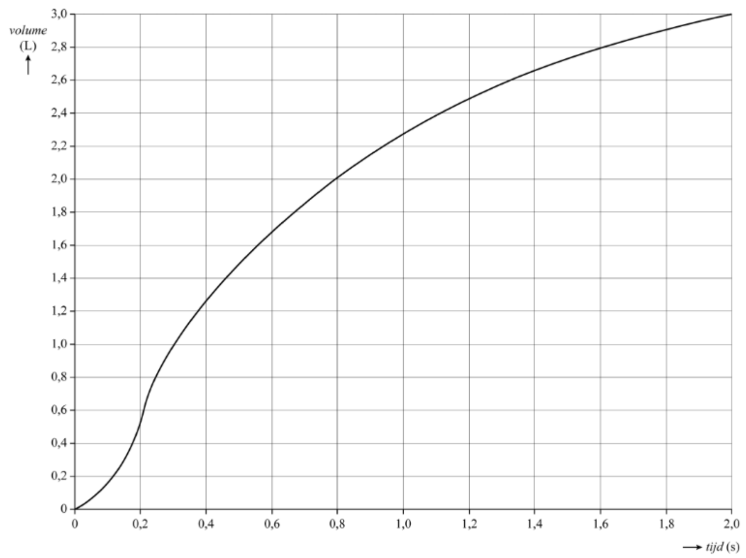
5 Uit de volgende grafiek (van een longvolume als functie van de tijd)



de parameters p, q, en r in de formule $V = p + q\cos(rt)$ berekenen.
Uitwerking: Dus q is de helft van het verschil tussen maximum en minimum: $q = 2700 - 2200 = 500$, en p is het gemiddelde van die twee: $p = \frac{1}{2}(2700 + 2200) = 2450$. De periode is gelijk aan 5, dus moet $5r = 2\pi r$, of $r = \frac{2\pi}{5} \approx 1{,}256637062 \approx 1{,}26$ (twee decimalen).
Opmerkingen: Niet moeilijk, vermoedelijk vaak geoefend.

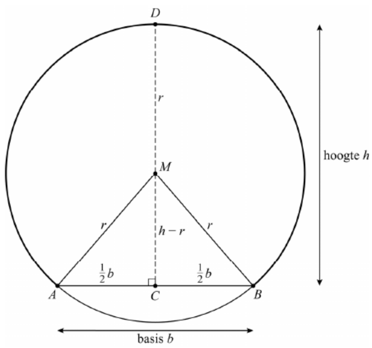
6 Als een persoon zich inspant krijgen we $V = 2500+1200\sin\bigl(4{,}19(t-0{,}37)\bigr)$, met V in mL en t in seconden. Bij iedere ademhaling komt er “maximum minus minimum” lucht binnen. Deze persoon ademt gedurende één minuut bijna 100 liter lucht in. Bereken hoeveel liter dat is.
Uitwerking: Bij iedere ademtocht gaat er 2400 mL lucht naar binnen. De periode van een ademtocht is $\frac{2\pi}{4{,}19}$; dat betekent $\frac{60\cdot 4{,}19}{2\pi}$ ademtochten per minuut, in totaal dus $\frac{60\cdot 4{,}19}{2\pi} \cdot 2{,}4$ liter lucht; intoetsen: 96,0277 liter. Moest geheel, dus 96 L/min.
Opmerkingen: Ik moest dit twee keer lezen; de “bijna 100 liter” was voor mij een afleider: ik wilde het veelvoud van 2,4 dat het dichtst onder 100 ligt gaan zoeken (en de formule verder negeren). Maar gewoon de formule toepassen was dus de bedoeling. Misschien was de 100 gegeven om de leerling lont te laten ruiken bij een te grote afwijking?

7 Uit deze grafiek moet de PEF (“peak expiratory flow”) van een persoon worden afgelezen.



En wel in (gehele) liters per minuut.
Uitwerking: Het gaat om het punt waar de afgeleide maximaal is, het buigpunt dus. Dat ligt zo ongeveer bij $t = 0{,}2$ s. Met een liniaal en de natte vinger kom ik op een helling van de raaklijn van 7,25; dat is in liters per seconde, dat maal 60 geeft dus een PEF van 435 L/min.
Opmerkingen: Tsja, het voorschrift vindt dat het buigpunt bij 0,21 s ligt, maar laat een afwijking van 0,04 s toe. Er overigens geen voorbeeldberekening gegeven; ik hoop dat ik de goede order van grootte te pakken heb.

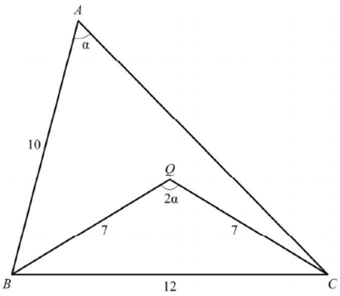
8 Een verhaal over een kunstwerk, dat verder niets toevoegt, leidt tot dit plaatje



Te bewijzen dat
$$r = \frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{2h}$$
Uitwerking: Stelling van Pythagoras: $(h - r)^2 + (\frac{1}{2}b)^2 = r^2$. Uitwerken dingen wegstrepen geeft $h^2 - 2hr + \frac{1}{4}b^2 = 0$ of $h^2 + \frac{1}{4}b^2 = 2hr$. Nu door $2h$ delen en we zijn klaar.
Opmerkingen: Het hele verhaal kan weg; het plaatje zegt genoeg.

9 De vergelijking uit de vorige som moet herleid worden tot iets van de vorm $b = p \cdot \sqrt{q \cdot h - h^2}$.
Uitwerking: Weer met $2h$ vermenigvuldigen en $\frac{1}{4}b^2$ vrijmaken: $\frac{1}{4}b^2 = 2rh - h^2$, of $b^2 = 4(2rh - h^2)$. Worteltrekken geeft $b = 2\sqrt{2r \cdot h - h^2}$, dus $p = 2$ en $q = 2r$.
Opmerkingen: Een oefening in … formulemanipulatie?

10 Bereken AC in de volgende figuur:



Uitwerking: Twee keer de cosinusregel. Eerst BCQ: $12^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cos 2\alpha$; daar kunnen we $144 = 98 - 98(2\cos^2\alpha - 1)$ van maken, of $196\cos^2\alpha = 52$ en dus $\cos^2\alpha = \frac{13}{49}$. Omdat α er scherp uitziet nemen we $\cos\alpha = \frac{1}{7}\sqrt{13}$.
Nu in driehoek BCA: $12^2 + 10^2 + AC^2 - 2 \cdot 10 \cdot AC \cdot \cos\alpha$. Dat geeft een tweedegraadsvergelijking voor AC, namelijk $AC^2 - \frac{20}{7}\sqrt{13} \cdot AC - 44 = 0$. Kwadraat afsplitsen: $(AC - \frac{10}{7}\sqrt{13})^2 = 44 + \frac{100}{49} \cdot 13$. We vinden $AC = \frac{10}{7}\sqrt{13} \pm \frac{24}{7}\sqrt{6}$; we nemen de + want de andere oplossing is negatief. Intoetsen geeft $AC \approx 13{,}54903808 \approx 13{,}55$.
Opmerkingen: Het voorschrift had deze oplossing niet; daar werd op meer knoppendrukken geanticipeerd. De hoek 2α en dus ook α zelf kwamen uit de rekenmachine. De afrondingen onderweg maakten niet uit, het eindantwoord was hetzelfde. Verder niet moeilijk, maar wat hier uit het oog verloren werd is dat bijna nooit om de hoek gaat maar om de cosinus.

11 We bekijken f, gegeven door $f(x) = 2 \cdot 2^{x-3} - 4$. We moeten de grafiek van f uit die van $y = 2^x$ maken door alleen translaties te gebruiken.
Uitwerking: We hebben $f(x) = 2^{x-2} - 4$. Dat gaat door 2^x twee eenheden naar rechts te schuiven tot 2^{x-2}, en dan vier eenheden naar beneden tot $2^{x-2} - 4$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; vaak geoefend neem ik aan.

12 Bepaal exact de x-coördinaat van het punt op de grafiek van f met y-coördinaat gelijk aan 10.
Uitwerking: Iets korter: los $f(x) = 10$ op. Dat wordt $2^{x-2} - 4 = 10$ of $2^{x-2} = 14$, dus $x - 2 = {}^2\log 14$ of $x = 2 + {}^2\log 14$.
Opmerkingen: Dat kan ook via $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$. Maar waarom zo omslachtig geformuleerd?

13 Een tweede functie g, gegeven door $g(x) = -2^{x-3} + 2$. Bereken het snijpunt van de grafieken van f en g.
Uitwerking: Schrijf even $u = 2^{x-3}$, dan ziet $f(x) = g(x)$ er wat overzichtelijker uit: $2u - 4 = -u + 2$, met oplossing $u = 2$. Dus komt er $x - 3 = 1$, en $x = 4$; en dan $y = f(4) = g(4) = 0$. We vinden $S = (4, 0)$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

14 Hoogspringen en punten voor de tienkamp leiden tot $P = a \cdot (H - b)$, geldig voor $H \geqslant 75$ (in centimeters). Gevraagd a en b te berekenen.
Uitwerking: In het verhaal staat, impliciet en expliciet, dat $P = 0$ als $H = 75$ en $P = 1000$ als $H = 220$. Als we dat invullen komt er eerst $0 = a(75 - b)$, dat gaat fout als $a = 0$ en goed als $b = 75$. Vervolgens $1000 = a(220 - 75)$, dus $a = \frac{1000}{145} = \frac{200}{29} \approx 6{,}9$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

15 Een nieuwe, recentere, formule: $P = 0{,}8465 \cdot (H - 75)^{1{,}42}$ (weer H in centimeters). Gevraagd uit te leggen waarom bij grotere H één centmeter extra meer punten extra oplevert.
Uitwerking: De exponent is groter dan 1, dus de stijging/helling neemt toe met H.
Opmerkingen: Dit was ook de oplossing in het voorschrift. Het klinkt als een vuistregel/slagzin.

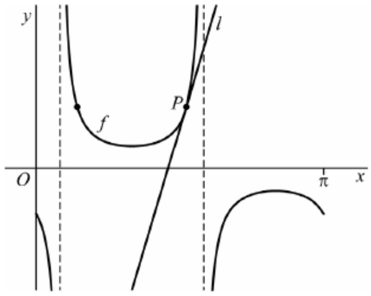
16 Bij de 1500 meter hardlopen hebben we $Q = 0{,}03768(480 - t)^{1{,}85}$ als puntenformule, met t in seconden (gemeten in hondersten van seconden). Bij welke tijd op de 1500 meter krijg je nog net meer punten dan bij een spronghoogte van 228 cm?
Uitwerking: Bij $H = 228$ krijgen we $P = 0{,}8465 \cdot 153^{1{,}42}$ punten, naar beneden afgerond. Rekenmachine: $P = 1071$ (voor afronding 1071,244966). Dus nu $Q \geqslant 1072$ oplossen.
Dat heb ik Maple maar laten doen: $Q = 1072$ geeft $t = 224{,}3693560$ s. Voor alle zekerheid naar beneden afronden: $t = 224{,}36$ s, ofwel 3 minuten en 44,36 seconden zou genoeg moeten zijn.
Opmerkingen: Niet moeilijk met de juiste knoppen, hoop ik.

17 Op $[0, \pi]$ bekijken we f, gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{4\cos 2(x - \frac{1}{3}\pi)}$$

Stel op exacte wijze de vergelijkingen van de twee verticale asymptoten van de grafiek van f op.
Uitwerking: We lossen $\cos 2(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$ op: $2(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\pi + k\pi$. Dat wordt $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}$, en dus $x = \frac{7\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, met k geheel natuurlijk. Om in het interval $[0, \pi]$ te komen moeten we $k = 0$ en $k = -1$ hebben. We krijgen $x = \frac{\pi}{12}$ en $x = \frac{7\pi}{12}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

18 In het plaatje zijn de twee punten op de grafiek van f met y-coördinaat $\frac{2}{3}$ getekend.



Te berekenen: de richtings coëfficiënt van de raaklijn ℓ aan de grafiek in P, met behulp van de grafische rekenmachine.
Uitwerking: De afgeleide van f is gegeven door

$$f'(x) = 8\sin 2(x - \frac{1}{3}\pi) \cdot \left(\frac{1}{4\cos 2(x - \frac{1}{3}\pi)}\right)^2 = 8 \cdot f(x)^2 \cdot \sin 2(x - \frac{1}{3}\pi)$$

Er geldt $P = (a, \frac{2}{3})$ voor een a vrij dicht bij $\frac{7\pi}{12}$. Dus $f(a) = \frac{2}{3}$ en dan geldt $f'(a) = 8 \cdot \frac{4}{9} \cdot \sin 2(a - \frac{1}{3}\pi)$. Omdat a tussen $\frac{1}{3}\pi$ en $\frac{7\pi}{12}$ ligt, ligt $2(a - \frac{1}{3}\pi)$ tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$. Dan is $\sin 2(a - \frac{1}{3}\pi)$ positief en dus gelijk aan $\sqrt{1 - \cos^2 2(a - \frac{1}{3}\pi)}$. Maar $4\cos 2(a - \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}$, dus $\cos 2(a - \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{8}$, en daarmee $\sin 2(a - \frac{1}{3}\pi) = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{55}$. We vinden dat $f'(a) = 8 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{55} = \frac{4}{9}\sqrt{55} \approx 3{,}296088216 \approx 3{,}3$.
Opmerkingen: Ik vond het wel aardig het exact te doen. Hoe het met een grafische rekenmachine zou moeten weet ik niet. Misschien a bepalen en wat waarden invullen?