EINDEXAMEN WISKUNDE B, HAVO, 2023-06-27

1 Een verhaal over zwangerschappen eindigt met $d = 8{,}052 \cdot \sqrt{1{,}037a} + 23{,}73$ als betrekking tussen zwangerschapsduur (d, in dagen) en afstand bovenkant hoofd en onderkant billen (a, in mm), bruikbaar tussen 8,5 en 13 weken. Schat de zwangerschapsduur als $a = 55$ mm.
Uitwerking: Invullen: $d = 84{,}53992\ldots$, delen door 7 en afronden: 12 weken.
Opmerkingen: Flauw.

2 Nu a in d uitdrukken, in de vorm $a = p(q \cdot d - r)^2$. Waarbij gegeven is dat mogelijke waarden, afgerond op twee decimalen, zijn $p = 0{,}96$, $q = 0{,}12$, en $r = 2{,}95$. Die warden moeten nu op drie decimalen bepaald worden.
Uitwerking: Aangezien 1/8 ongeveer 0,12 is lijkt het erop dat we *verwacht worden* dit te doen: 1) Deel door 8,052, dus $\sqrt{1{,}037a} = \frac{1}{8{,}052}d - \frac{23{,}37}{8{,}0052}$. Hieruit hebben we q en r al: $q = \frac{1}{8{,}052} \approx 0{,}124$, en $r = \frac{23{,}37}{8{,}052} \approx 2{,}947$. 2) Kwadrateer en deel dan door 1,037: $a = \frac{1}{1{,}037}(q \cdot d - r)^2$, en dus $p = \frac{1}{1{,}037} \approx 0{,}964$.
Opmerkingen: Dit is wel erg gekunsteld; in de praktijk zou ik het met twee parameters doen door $\frac{1}{8{,}052^2}$ (ook) buiten de haakjes te houden (dus met $q = 1$): $a = 0{,}0149(d - 23{,}37)^2$.

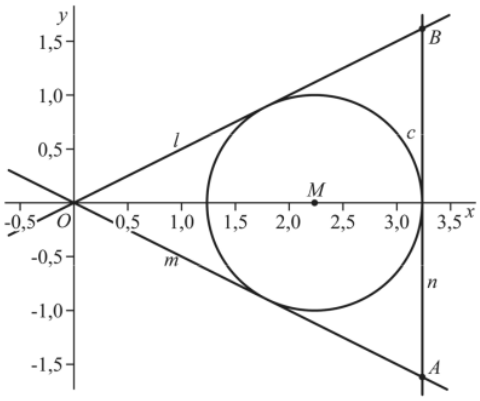
3 Nu aantonen dat a toenemend stijgend is, met behulp van de afgeleide en met gebruik van de gegeven waarden in twee decimalen.
Uitwerking: De afgeleide van a naar d is $0{,}96 \cdot 2 \cdot (0{,}12d - 2{,}95) \cdot 0{,}12$. Er geldt dat $d \geqslant 7 \cdot 8{,}5$, dus $0{,}12d \geqslant 7{,}14$. De afgeleide is dus positief, en zelf ook stijgend.
Opmerkingen: Niet moeilijk; vermoedelijk standaard.

4 Vanaf 13 weken werken we met

$$w = 3{,}12958 \cdot 1{,}00244^h \cdot h^{0{,}2794}$$

als formule voor de zwangerschapsduur w (in weken) in termen van de omtrek van het hoofd (h, in mm). Gevraagd, in hele mm, de hoofdomtrek die bij $w = 14$ hoort.
Uitwerking: Maple's `fsolve`-commando geeft $h = 93{,}941$, afgerond 94 mm.
Opmerkingen: Knoppen drukken dus en een onwaarschijnlijke precisie in die getallen. Wat dit toetst weet ik niet.

5 Het volgende plaatje hoort bij deze en de volgende opgave.

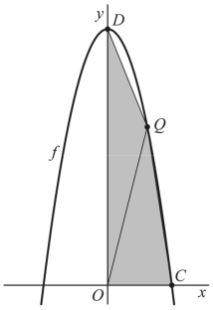


De lijnen l en m hebben vergelijkingen respectievelijk $y = \frac{1}{2}x$ en $y = -\frac{1}{2}x$. De cirkel heeft middelpunt $(\sqrt{5}, 0)$ en straal 1. Aan te tonen dat l de cirkel raakt.
Uitwerking: We vullen $y = \frac{1}{2}x$ in in de vergelijking van de cirkel: $(x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 1$. Dat geeft, na invullen en omwerken: $\frac{5}{4}x^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$; dat kun je schrijven als $(\frac{\sqrt{5}}{2}x - 2)^2 = 0$. Er is dus maar één oplossing, $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$, en dus één snijpunt, een raakpunt dus.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

6 De derde lijn n komt nu in het spel. We krijgen een driehoek OAB, waarvan onze cirkel de ingeschreven cirkel is. De vraag is of de oppervlakte meer dan twee keer die van de cirkel is.
Uitwerking: De punten $A = (\sqrt{5}+1, \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1))$ en $B = (\sqrt{5}+1, -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1))$ liggen op afstand $\sqrt{5}+1$. Dus de basis AB van de driehoek is $\sqrt{5}+1$, de hoogte van de driehoek is ook gelijk aan $\sqrt{5}+1$. De oppervlakte is dus gelijk aan $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)^2 = 3+\sqrt{5}$. Aangezien $\sqrt{5} < 3$ is die oppervlakte kleiner dan 6 en dus zeker kleiner dan 2π, wat twee keer de oppervlakte van de cirkel is.
Opmerkingen: Niet moeilijk, en het kan helemaal exact. Het voorschrift deed het met benaderingen.

7 Gegeven $f(x) = 16 - x^2$. Het punt P ligt op de grafiek van f en wel zo dat voor de snijpunten A en B van de raaklijn met respectievelijk de x- en y-as geldt dat $OB = 3OA$. Wat is de x-coördinaat van P?
Uitwerking: De lijn door B en A heeft dus richtingscoëfficiënt -3. We moeten $f'(x) = -3$ oplossen, dus $-2x = -3$. Antwoord: $x = \frac{3}{2}$.
Opmerkingen: Eigenlijk nogal flauw; maar een redelijke leesoefening.

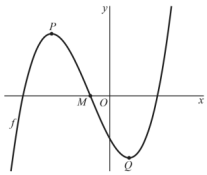
8 Tussen de top D van de grafiek en het positieve snijpunt C van de grafiek met de x-as nemen we een punt Q op de grafiek, met x-coördinaat q.



Te bewijzen: driehoek OCQ heeft oppervlakte $2(16 - q^2)$.
Uitwerking: Er geldt $C = (4, 0)$ en $Q = (q, 16 - q^2)$, dus via basis-maal-halve-hoogte komen we op $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (16 - q^2)$, als gewenst.
Opmerkingen: Makkie. Bedoeld als voorbereiding op som 9 denk ik.

9 Gegeven wordt nog dat driehoek OQD oppervlakte $8q$ heeft. Als we Q zo kiezen dat beide driehoeken dezelfde oppervlakte hebben, wat is die oppervlakte dan?
Uitwerking: We moeten eerst $8q = 32 - 2q^2$ oplossen, of $q^2 + 4q - 16 = 0$. Kwadraat afsplitsen: $(q+2)^2 - 20 = 0$, dus $q = -2 \pm 2\sqrt{5}$. Maar q is positief, dus $q = -2 + 2\sqrt{5}$. De oppervlakte is dus $-16 + 16\sqrt{5}$.
Opmerkingen: Dit toetst kwadratische vergelijkingen?

10 Gegeven $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - 88$. Ook gegeven: het middelste snijpunt van de grafiek met de x-as: $M = (-2, 0)$.

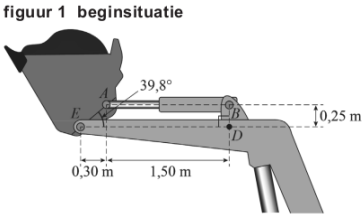


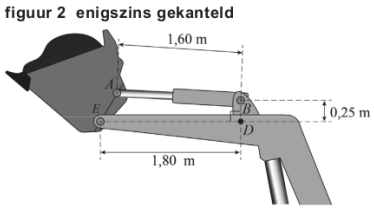
Te bewijzen dat M midden tussen de toppen P en Q ligt.
Uitwerking: Om de toppen te vinden lossen we $f'(x) = 0$ op: $f'(x) = 3x^2 + 12x - 36 = 3(x^2 + 4x - 12)$. Kwadraat afsplitsen geeft $(x+2)^2 - 16 = 0$, dus $x = -2 \pm 4$. Daar staat dat P en Q beide op horizontale afstand 4 van M liggen. Verder geldt $f(-6) = 128$, en $f(2) = -128$ dus de symmetrie is perfect.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

11 Als we f twee eenheden naar rechts schuiven krijgen we de grafiek van de functie g; te bewijzen $g(x) = x^3 - 48x$.
Uitwerking: Er geldt $g(x) = f(x-2)$; uitwerken geeft inderdaad $x^3 - 48x$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; vaak geoefend neem ik aan.

12 Met behulp van g zijn de andere nulpunten van f wat makkelijker te bepalen. Dat moet nu gedaan worden.
Uitwerking: De nulpunten van g vinden we door te ontbinden: $x^3 - 48x = x(x - 4\sqrt{3})(x + 4\sqrt{3})$. Die schuiven we twee eenheden naar links: we vinden $-2 - 4\sqrt{3}$ en $-2 + 4\sqrt{3}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk. Maar zo lastig is een directe berekening nou ook weer niet: $x + 2$ is een factor van f en $f(x) = (x + 2)(x^2 + 4x - 44)$. En daar haal je de nulpunten zo uit.

13 Een langverhaal over een shovel met twee plaatjes:



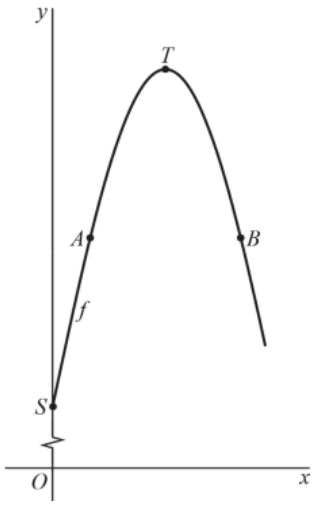


Gegevens: links zijn AB en ED horizontaal; $AB = 150$ cm, $ED = 180$ cm, en $BD = 25$ cm; de projectie van EA op ED is 30 cm lang; en $\angle AED = 39.8°$. Rechts is AB langer geworden: 160 cm. De vraag is hoeveel graden de bak gekanteld is.
Uitwerking: We moeten dus het verschil tussen de nieuwe en de oude hoek $\angle AED$ bepalen. Om te beginnen: $AE \cdot \cos 39.8° = 30$, daaruit volgt $AE = 39{,}05$ cm. De nieuwe hoek $\angle AED$ is de som van $\angle AEB$ en $\angle BED$. De tweede is makkelijk want $\tan \angle BED = \frac{25}{180}$, via de arctangensknop komen we op 7,9°. Voor de eerste gebruiken de de cosinusregel in driehoek ABE:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2 \cdot AE \cdot BE \cdot \cos \angle AEB$$

We hebben AB en AE al, en $BE^2 = BD^2 + ED^2 = 25^2 + 180^2$. De juiste knoppen geven $\cos \angle AEB = 0{,}63$ en dan $\angle AEB = 50{,}9°$. De nieuwe hoek is gelijk aan $7{,}9 + 50{,}9 = 58{,}8°$ en het verschil met de oude is 19°.
Opmerkingen: Aardige opgave.

14 Gegeven $f(x) = 3 + 3\sin(\frac{1}{2}\pi x)$ en dit deel van de grafiek:

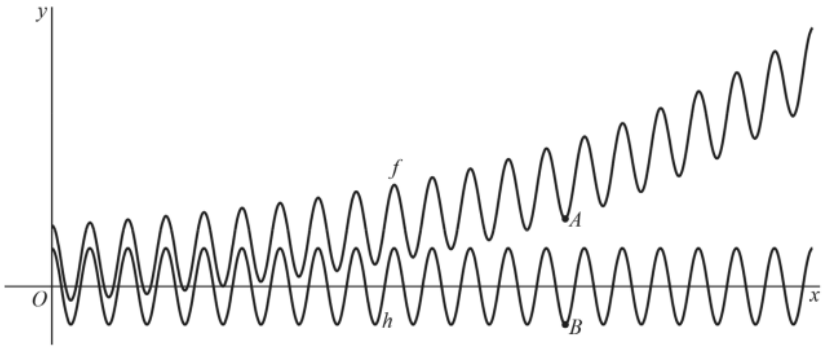


Het punt A heeft x-coördinaat $\frac{1}{3}$ en B heeft dezelfde y-coördinaat als A. Te bewijzen: de parabool door T, A en B heeft vergelijking $y = -3\frac{3}{8}x^2 + 6\frac{3}{4}x + 2\frac{5}{8}$.
Uitwerking: Ten eerste $f(\frac{1}{3}) = 3 + 3\sin\frac{\pi}{6} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. Via $\sin x = \sin(\pi - x)$ vinden we dat $B = (\frac{5}{3}, \frac{9}{2})$. Ook geldt $T = (1, 6)$. Als we controleren dat de drie punten op de parabool liggen zijn we klaar. We kunnen hem ook even uitrekenen: omdat de top in $(1, 6)$ ligt weten we dat $y = -a(x-1)^2 + 6$, met $a > 0$. Vul A in: $\frac{9}{2} = -a(-\frac{2}{3})^2 + 6$ levert $a \cdot \frac{4}{9} = \frac{3}{2}$, en dus $a = \frac{27}{8}$. De vergelijking $y = -\frac{27}{8}(x-1)^2 + 6$ kun je omwerken tot de gewenste vorm.
Opmerkingen: Uiteindelijk niet moeilijk, er zijn in het voorschrift vele wegen die naar Rome leiden; ik zou mijn oplossing niet verder uitwerken want die is informatiever.

15 Het gedeelte van de grafiek tussen S (op de y-as) en A wordt benaderd met het lijnstuk met vergelijking $y = \frac{9}{2}x + 3$. Gevraagd wordt te onderzoeken of lijnstuk en parabool een goede benadering van f oplevern, waar *goed* betekent dar er in A geen knik optreedt.
Uitwerking: De helling van links is gelijk aan $\frac{9}{2}$. De helling van rechts krijgen we door $\frac{1}{3}$ in de afgeleide van de parabool in te vullen: $-\frac{27}{4}(\frac{1}{3} - 1) = \frac{9}{2}$. Er treedt dus geen knik op.
Opmerkingen: Dit was ook de oplossing in het voorschrift. Het klinkt als een vuistregel/slagzin.

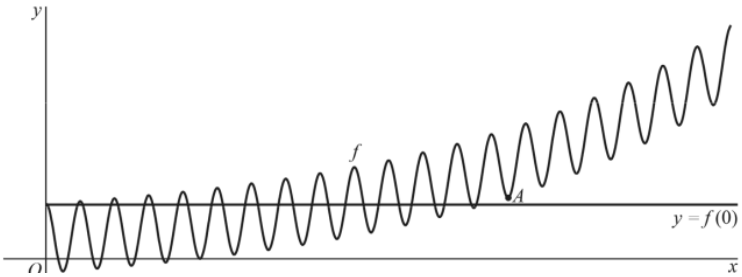
16 Gegeven de lijnen l met vergelijking $y = \frac{1}{2}x$ en k die ontstaat door l één eenheid omhoog te schuiven. Een punt P onder l ligt op afstand 3 van l; gevraagd de afstand van P tot k.
Uitwerking: De vergelijking van k is dus $y = \frac{1}{2}x + 1$. We moeten de afstand tussen k en l bij 3 optellen. Het punt $(0, 1)$ ligt op k en de lijn met vergelijking $y = 1 - 2x$ gaat door dat punt en staat loodrecht op k en l. Het snijpunt van die lijn met l is $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, en de afstand tussen $(0, 1)$ en dat punt is gelijk aan $\sqrt{(\frac{2}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$. Het antwoord op de vraag is dus $3 + \frac{2}{5}\sqrt{5}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; het moest in twee decimalen maar daar had ik geen zin in.

Voor de laatste drie opgaven bekijken we f, g, en h, gegeven door $f(x) = g(x) + h(x)$, met $g(x) = 3 \cdot 1{,}12^x$ en $h(x) = 5\sin\big(2\pi(x + \frac{1}{4})\big)$. Hier zijn de grafieken van f en h (met $x \geqslant 0$):



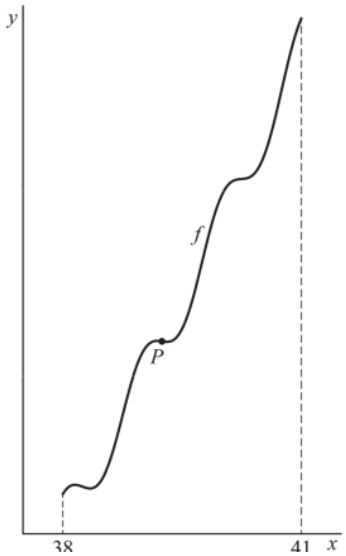
17 In het plaatje bevindt zich in A het veertiende lokale minimum van f, en in B het veertiende lokale minimum van h. De vraag is of A en B dezelfde x-coördinaat hebben.
Uitwerking: In $B = (b, -5)$ geldt $h'(b) = 0$ en dus $f'(b) = g'(b) = 3 \cdot 1{,}12^b \cdot \ln 1{,}12 \neq 0$, dus f neemt in b geen extreem aan. De punten hebben niet dezelfde x-coördinaat.
Opmerkingen: In het examen was de x-coördinaat van A gegeven als 13,492, dat was dus niet nodig. Maar als de afgeleide van exponentiële functies niet bekend zijn moet je de minima van h opsporen; die liggen daar waar $x = k + \frac{1}{2}$ voor een gehele k en A ligt niet boven zo'n waarde.

18 De exponentiële functie g trekt f boven alles uit, dus ook boven de waarde $f(0)$.



De laatste oplossing van $f(x) = f(0)$ ligt volgens het plaatje vlak voor A. Die oplossing moet bepaald worden, in twee decimalen.
Uitwerking: Er geldt $f(0) = 8$, dus we moeten $f(x) = 8$ oplossen. De laatste twee oplossingen liggen zo te zien dicht bij $12\frac{1}{2}$. Wat pielen met Maple's `fsolve` levert $x = 12{,}57$ als laatste oplossing.
Opmerkingen: Op zich niet moeilijk, als je de juiste knoppen weet in te drukken.

19 Als x groter wordt gaat $g'(x)$ overheersen en zal f op de duur strict stijgend worden. De laatste twee intervallen waarop f nog dalend is liggen in het interval $[38, 40]$.



Het punt P lig in het laatste interval waar f nog daalt en de daling is daar het sterkst. Gevraagd: de x-coördinaat van P (in één decimaal).
Uitwerking: Weer: pielen met `fsolve` gaf mij 39,185 en 39,309 als plekken waar f' de waarde 0 aanneemt. Dan $f''(x) = 0$ in dat interval oplossen gaf $x = 39{,}247$, in één decimaal 39,2 dus.
Opmerkingen: Op zich geen slechte opgave, maar ik zou niet weten hoe ik het op een rekenmachientje zou doen.