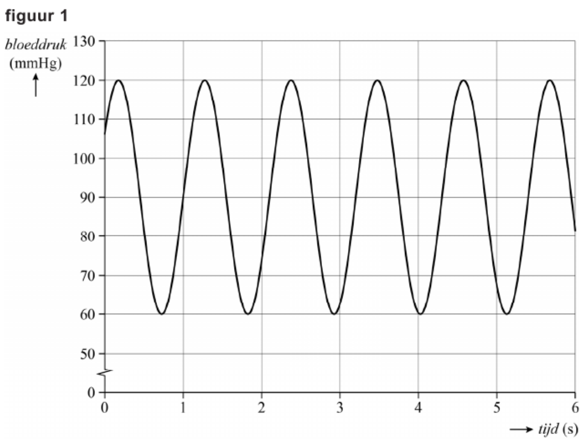
EINDEXAMEN WISKUNDE B, HAVO, 2024-05-16

1 Gegeven de functie f door $f(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3 - \frac{1}{2}x + 3$ en zijn afgeleide $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$. Te bewijzen dat dit inderdaad de afgeleide van f is.
Uitwerking: Differentiëren dan maar: $6(\frac{1}{3}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 2(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1) - \frac{1}{2}$. Na wegwerken van de haakjes krijgen we inderdaan de gegeven functie.
Opmerkingen: Tsja, even de kettingregel testen; en verzekeren dat de volgende som maakbaar blijft.

2 Verder krijgen we g, gegeven door $g(x) = x^2 - \frac{3}{10}x + c$, met c een nog onbekend constante. De grafiek van g gaat door de linkertop, A, van de grafiek van f (te zien in een plaatje). Te berekenen (exact): c.
Uitwerking: Om A te bepalen lossen we $f'(x) = 0$ op. Bij het differentiëren vonden we eerst $f'(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^2 - \frac{1}{2}$. Dat lost wat makkelijker op: $(\frac{1}{3}x - 1)^2 = \frac{1}{4}$, dus $\frac{1}{3}x - 1 = \pm\frac{1}{2}$, of $x = 3 \pm \frac{3}{2}$, de linker ligt bij $x = \frac{3}{2}$. En $f(\frac{3}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 3 = 2$.
Nu zorgen dat $g(\frac{3}{2}) = 2$, dat geeft $\frac{9}{4} - \frac{9}{20} + c = 2$, met oplossing $c = \frac{1}{5}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; de breuken in de coëfficiënten kunnen voor foutjes zorgen.

3 Uit de volgende figuur



moeten a, b, c, en d afgelezen worden om de formule die deze grafiek oplevert op te kunnen stellen: $P(t) = a + b\sin\bigl(c(t - d)\bigr)$. Zo nodig in één decimaal.
Uitwerking: De maximum- en minumimwaarden zijn duidelijk te zien: 120 en 60. Dat geeft meteen $b = 30$ en $a = 90$. Ook d is duidelijk: er geldt $P(t) = 1$, dus $d = 1$.
Blijft c: met een liniaal op mijn scherm mat ik 15 mm voor een seconde, en 17 mm voor een periode, dus een periode is $\frac{17}{15}$ s. Dus $c = 2\pi \cdot \frac{15}{17} \approx 5{,}54391$; in één decimaal: $c = 5{,}5$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; maar er is een "maar". Het voorschrift komt op een periode van 1,1 s maar geeft niet aan *hoe* men daaraan komt. Eén mogelijkheid: $\frac{17}{15} = 1{,}133\ldots \approx 1{,}1$. Dit heeft echter invloed op het antwoord: afronden uitstellen tot het eind levert dus $c = 5{,}5$, maar onderweg al een keer afronden leidt tot $c = 2\pi/1{,}1 \approx 5{,}71192$; in één decimaal: $c = 5{,}7$.

4 Door middel van een extra figuur wordt aangegeven dat de bloeddruk zich toch niet als een sinusoïde gedraagt. De gemiddelde bloeddruk hangt als volgt van de maximum- en minimumdruk af: $P_{\text{gem}} = P_{\min} + 0{,}33(P_{\max} - P_{\min})$. Gevraagd: hoeveel keer zo groot als die van $P_{\max}$ is de bijdrage van $P_{\min}$ aan het gemiddelde? (Eindantwoord een geheel getal).
Uitwerking: De uitdrukking wordt $0{,}67P_{\min} + 0{,}33P_{\max}$, een gewogen gemiddelde waarin de weging van $P_{\min}$ dus twee keer zo groot is als die van $P_{\max}$.
Opmerkingen: Nogal flauw. Ik zie niet wat dit test en waarom de tweede grafiek erbij gesleept is.

5 Een nieuwe formule voor de gemiddelde bloeddruk, waarin de hartslag meegenomen is:

$$P_{\text{gem}} = P_{\min} + (0{,}33 + 0{,}0012 \cdot H)(P_{\max} - P_{\min})$$

met H in slagen per minuut. Gegeven $P_{\min} = 80$ mmHg en $P_{\max} = 120$ mmHg. Bij welke hartslag is de gemiddelde bleddruk gelijk aan 100 mmHg?

Uitwerking: De gewenste bloeddruk is het rekenkundig gemiddelde van 80 en 120, dus $0{,}33 + 0{,}0012H$ moet gelijk zijn aan 0,5. Dit geeft $0{,}0012H = 0{,}17$ of $H = 0{,}17/0{,}0012 = 141{,}666$. Afgerond op hele slagen: $H = 142$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, en niet meer dan een oefening in knoppen drukken ben ik bang.

6 De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9} + \frac{20}{9}$. In het snijpunt D van de grafiek met de y-as maakt de grafiek een scherpe hoek met de y-as. Onderzoek (algebraïsch) of de hoek kleiner is dan 30°.
Uitwerking: De afgeleide van f is $f'(x) = \frac{2}{9}x - \frac{16}{9}$. Dus $f'(0) = -\frac{16}{9}$. Als je dat kwadrateert krijg je $\frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81}$, dus $f'(0) < -\sqrt{3}$. De hoek die de grafiek in D met de x-as maakt ligt dus tussen $-60°$ en $-90°$; de hoek met de y-as is dus in absolute waarde kleiner dan 30°.
Opmerkingen: Even nadenken en je hebt niet eens een rekenmachien nodig. Het voorschrift deed het wel met behulp van apparatuur.

7 We nemen de cirkel c met middelpunt T, de top van de grafiek van f, die door de snijpunten A en B van de grafiek met de x-as gaat. Te bepalen (exact): de snijpunten van c met de y-as.
Uitwerking: Eerst maar $f(x) = 0$ oplossen: $f(x) = \frac{4}{9}(x^2 - 4x - 5) = \frac{4}{9}(x-5)(x+1)$. Dus $A = (-1, 0)$ en $B = (5, 0)$, en de top ligt bij $x = 2$ op hoogte $\frac{4}{9} \cdot -3 \cdot 3 = -4$. De straal van c is dus gelijk aan $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Met behulp van de stelling van Pythagoras zien de dat voor de gezochte snijpunten geldt: $2^2 + (y+4)^2 = 25$, ofwel $y + 4 = \pm\sqrt{21}$. De snijpunten zijn dus $(-4 - \sqrt{12}, 0)$ en $-4 + \sqrt{21}, 0)$.
Opmerkingen: De eerste echt aardige opgave ...

8 Met een, uitendelijk niet terzake doende, afbeelding van een parkje in Lyon krijgen we de opdracht (algebraïsch) de oppervlakte van een driehoek van zijden 92, 101, en 145 te berekenen. Eindantwoord in gehele eenheden (m^2, de lengten zijn in meters).
Uitwerking: We hebben één van de hoeken nodig om een hoogte van de driehoek te bepalen. Dat doen we met behulp van de cosinusregel. Voor de hoek α tussen de twee langste zijden geldt

$$92^2 = 101^2 + 145^2 - 2 \cdot 101 \cdot 145 \cdot \cos\alpha$$

en dus

$$\cos\alpha = (92^2 - 101^2 - 145^2)(-2 \cdot 101 \cdot 145) = \frac{11381}{14645} \approx 0.7771$$

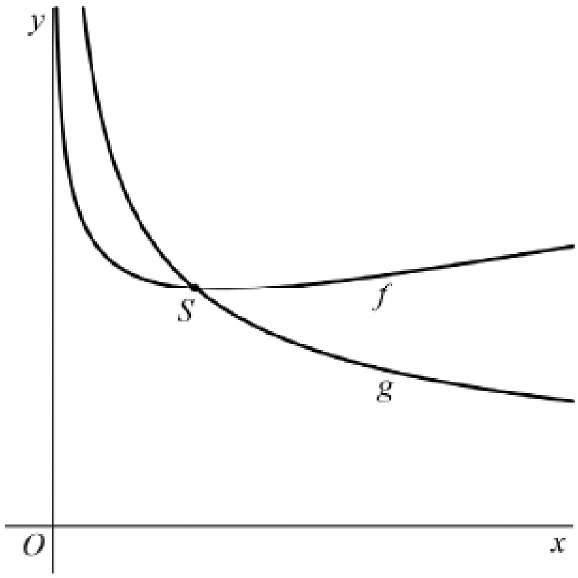
Dan geldt $\sin\alpha = \frac{104}{14645}\sqrt{7854}$ en de bijbehorende hoogte van de driehoek is gelijk aan $101 \cdot \sin\alpha$.
De oppervlakte is dus gelijk aan

$$\frac{1}{2} \cdot 145 \cdot 101 \cdot \frac{104}{14645}\sqrt{7854} \approx 4608{,}3854$$

Afgerond: $4608\,\mathrm{m}^2$.
Opmerkingen: Tsja, voor "bereken de oppervlakte van een driehoek met zijden 92, 101, en 145" hoef je toch niet helemaal naar Lyon? Het voorschrift geeft punten voor de hoek, die niet echt nodig is, alleen *de sinus* wordt gebruikt.

9 Gegeven twee functies f and g door $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}$ en $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

figuur 1



In de figuur lijkt het of f in het snijpunt S van de beide grafieken een minimum heeft; onderzoek of dit inderdaad zo is.
Uitwerking: Bepaal het minimum:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

Het nulpunt moet voldoen aan $x^{-\frac{3}{2}} = 2$ en dus $x = 2^{-\frac{2}{3}}$.
Als we die invullen in f en g krijgen we

$$f(2^{-\frac{2}{3}}) = \sqrt{2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{6}}\sqrt{6}}{2} \qquad \text{en} \qquad g(2^{-\frac{2}{3}}) = 2^{\frac{1}{3}}$$

Maar $g(2^{-\frac{2}{3}})^3 = 2$ en $f(2^{-\frac{2}{3}})^3 = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ en die waarden zijn niet gelijk. In het snijpunt neemt f dus niet zijn minimum aan.
Opmerkingen: In het voorschrift worden de x-coördinaten van S en het minimum bij benadering bepaald en ongelijk bevonden.

10 Gevraagd uit te leggen waarom voor grote waarden van x de grafieken van f en van h, gegeven door $h(x) = \sqrt{x}$, “dicht bij elkaar liggen”.
Uitwerking: Bekijk het verschil $f(x) = h(x)$ en gebruik de ‘worteltruc’:

$$\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{x}\right)} < \frac{1}{\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}$$

Dat verschil is dus kleiner dan $\frac{1}{2x}$ en dat laat zien dat $\lim_{x\to\infty} f(x) - h(x) = 0$.
Opmerkingen: Het voorschrift vindt het voldoende dat $\sqrt{\frac{1}{x}}$ naar 0 gaat. “Dus zal $f(x)$ naderen tot $\sqrt{x}$” wordt niet nader beargumenteerd.

11 Voor welke waarden van x is het verschil tussen $f(x)$ en $h(x)$ kleiner dan 0,01.
Uitwerking: Met een `solve`-knop de vergelijking $f(x) - h(x) = 0{,}01$ oplossen levert $x \approx 49{,}96465716$; in drie decimalen: voor $x \geqslant 49{,}965$ is het verschil kleiner.
Opmerkingen: Dit en het voorschrift nemen, zonder bewijs, aan dat het verschil dalend is. Ik zou zelf, voor alle zekerheid, de bovengrens uit opgave 10 gebruiken en concluderen dat de ongelijkheid zeker geldt voor $x \geqslant 50$.

12 Bitterheid van bier leidt tot een exponentiële verband: een percentage omgezet ingrediënt is na 5 minuten gelijk aan 4,5% en na 45 minuten opgelopen tot 24,2%. Het verband is uitgedrukt als $P = 4{,}5 \cdot a^t$, waarbij $t = 0$ bij het 5-minutenpunt hoort. Gevraagd de groeifactor a in vijf decimalen.
Uitwerking: Bij 45 minuten hoort $t = 40$ en a voldoet dus aan $24{,}2 = 4{,}5 \cdot a^{40}$. Maple geeft $a = \left(\frac{24{,}2}{4{,}5}\right)^{\frac{1}{40}} = 1{,}042953801$, in vijf decimalen 1,04295.
Opmerkingen: Rechttoe-rechtaan. In de tekst werd eventjes $P = 4{,}5 \cdot 1{,}043^t$ gegeven ("in drie decimalen") maar dit wordt nergens gebruikt; waarom dan?

13 Ne 45 minuten geldt de formule niet meer; de toename vordert langzamer. Na 60 minuten is het maximum van 27% bereikt. Gevraagd: het verschil in tijd, in minuten, tussen het omzetten van de eerste helft (13,5%) en het omzetten van de tweede helft.
Uitwerking: De eerste helft wordt nog volgens de oude formule omgezet. We zoeken t zó dat $4{,}5 \cdot 1{,}043^t = 13{,}5$. Dus $t = \frac{\ln 13{,}5 - \ln 4{,}5}{\ln 1{,}043} \approx 26{,}09$.
Dit betekent dat de helft in 31 minuten bereikt is; de tweede helft duurt 29 minuten en het verschil is 2 minuten.
Opmerkingen: Een oefening in logaritmen (of op de solve-knop drukken).

14 Een formule voor de European Bittering Unit (de EBU).

$$B = \frac{4 \cdot P \cdot M}{5 \cdot V}$$

Met P het percentage hierboven, M de massa hop (grammen), en V het volume gebrouwen bier (liters). Het recept vergt 30 minuten koken, de gewenste bitterheid is 30 EBU, en er is 100 g hop. Hoeveel liter bier kan gebrouwen worden?
Uitwerking: Bij 30 minuten brouwen hoort $t = 25$ en dus $P = 12{,}87772944$. Alles verder invullen geeft $150V = 4 \cdot 100 \cdot 12{,}87772944$ of $V = 4 \cdot 100 \cdot 12{,}87772944/150 = 34{,}34$, in hele liters: $V = 34\,\mathrm{l}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

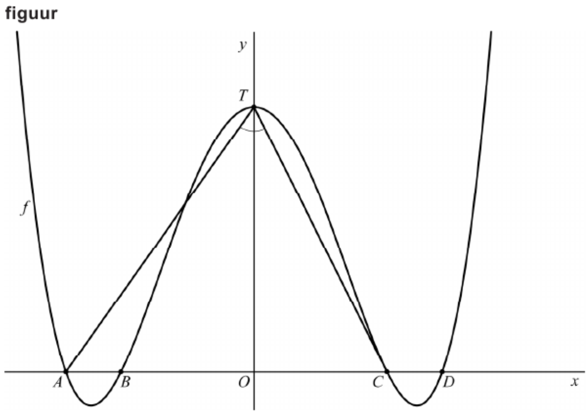
15 Twee functies, f en g, gegeven door $f(x) = 2^{x+3}$ en $g(x) = 2^{3+2\sqrt{x}}$. Gevraagd het snijpunt van de grafieken dat niet op de y-as ligt.
Uitwerking: Op te lossen: $x + 3 = 3 + 2\sqrt{x}$, of $x - 2\sqrt{x} = 0$, of $(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x} = 0$. De oplossingen zijn dus $x = 0$ en $x = 4$; we moeten dus $x = 4$ hebben. (Met y-coördinaat 128.)
Opmerkingen: Niet moeilijk.

16 De grafiek van f wordt getransformeerd: vermenigvuldigd met $-\frac{1}{5}$ ten opzichte van de x-as geeft de grafiek van h, daarna wordt de grafiek omhoog geschoven tot de horizontale asymptoot van de grafiek van de nieuwe functie k door het snijpunt van de grafiek van f met de y-as gaat.
Geef het voorschrift van k.
Uitwerking: Onderweg geldt $h(x) = -\frac{1}{5}2^{x+3}$, met de x-as als asymptoot. Verder hebben we $f(0) = 8$, dus h moet 8 omhoog en dus $k(x) = 8 - \frac{1}{5}2^{x+3}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

17 De grafiek van k snijdt de x-as bij $x = -3 + {}^2\log 40$. Herschrijf dit als ${}^2\log p$.
Uitwerking: Dat wordt ${}^2\log(40) + {}^2\log(\frac{1}{8}) = {}^2\log \frac{40}{8} = {}^2\log 5$.
Opmerkingen: Rare vraag, heeft eigenlijk niets met de functies te maken. Gelukkig klopt die x-coördinaat …

18 We werken met f, gegeven door $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$. Bepaal exact het minum van f.
Uitwerking: Kwadraat afsplitsen: $f(x) = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Dus heft minimum is gelijk aan $-\frac{1}{4}$, en het wordt aangenomen waar $x^2 = \frac{3}{2}$, dus in $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
Opmerkingen: Differentiëren etc, als in het voorschrift, kan ook.

19 De fuctie wordt voor ons ontbonden in factoren: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$.



Gevraagd wordt nu de hoek $\angle ATC$ te bepalen, in graden en in één decimaal.
Uitwerking: We hebben $A = (-\sqrt{2}, 0)$, $C = (1, 0)$, en $T = (0, 2)$. We kunnen we cosinusregel weer gebruiken met $AC = 1 + \sqrt{2}$, $AT = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$, en $CT = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, en dus

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 6 + 5 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \tau$$

We krijgen $\cos \tau = \frac{-8+2\sqrt{2}}{-2\sqrt{30}} \approx 0{,}4720978538$. Dan volgt $\tau \approx 61{,}82944°$. In 'eén decimaal: $61{,}8°$.
Opmerkingen: Er zijn andere manieren, in het voorschrift staan nog twee, met behulp van tangensen/ richtingscoëfficiënten.