

EINDEXAMEN WISKUNDE B, 2017, HERKANSING

- 1 Bepaal exact de positie van minimum van $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$.

Uitwerking: Dit komt neer op het minimaliseren van $u + u^{-2}$ voor $u > 0$ (met $u = 2^x$). De afgeleide is $1 - 2u^{-3}$ en die is gelijk aan 0 voor $u = \sqrt[3]{2}$. Dat leidt tot $x = \frac{1}{3}$.

Opmerkingen: Zonder substitutie leidt differentiëren en vereenvoudigen tot $2^{3x} = 2$, met dezelfde uitkomst.

- 2 Bereken k zó dat $2k = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

Uitwerking: De integraal is gelijk aan

$$\left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^{-2x}}{2 \ln 2} \right]_{-1}^1 = \frac{27}{8 \ln 2}$$

Dus $k = \frac{27}{16 \ln 2}$.

Opmerkingen: De vraag was wat aangekleed met oppervlakten maar leidt uiteindelijk tot de vergelijking hierboven.

- 3 Voor de betekenis van de letters in opgaven 3, 4 en 5 zie het plaatje in het examen. Driehoeken ACD en PCB zijn gelijkvormig.

Uitwerking: We hebben al: $\angle ACD = \angle PCB$.

Voorts: $\angle PBC + \angle ABC = \pi$ (gestrekte hoek) en $\angle ADC + \angle ABC = \pi$ (overstaande hoeken in een koordenvierhoek). Dus ook $\angle PBC = \angle ADC$.

Dit volstaat wegens het hhh-criterium.

- 4 Driehoeken BCD en PCA zijn gelijkvormig.

Uitwerking: Ten eerste: $\angle PCA = \angle PCB + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA = \angle BCD$.

Ten tweede: $\angle PAC = \angle BAC = \angle BDC$ wegens 'hoeken tegenover een koorde'.

Dus zijn we klaar wegens het hhh-criterium.

- 5 Maak het bewijs van de Stelling van Prolemaeus af, gegeven twee gevolgen van de gelijkvormigheden, namelijk $AP \cdot CD = AC \cdot BD$ en $BP \cdot CD = CB \cdot AD$.

Uitwerking: Begin met $AC \cdot BD$, die is gelijk aan $AP \cdot CD$ (eerste gegeven), en $AP = AB + BP$ dus komt er $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BP \cdot CD$. Met het tweede gegeven wordt dat $AB \cdot CD + CB \cdot AD$.

Opmerkingen: Deze drie opgaven waren niet echt moeilijk; een beetje hoeken jagen.

- 6 Uit twee verbanden, $v_0^2 + 2gh_0 = v^2 + 2gh$ en $r^2v = r_0^2v_0$, moet een formule voor r in termen van de rest afgeleid worden (en $x = h_0 - h$).

Uitwerking: Via $x = h_0 - h$ volgt uit de eerste betrekking dat $v^2 = v_0^2 + 2gx$ of $v = \sqrt{v_0^2 + 2gx}$.

Stop dit in de tweede betrekking:

$$r^2 = r_0^2 \frac{v_0}{v} = r_0^2 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}}$$

of

$$r = r_0 \frac{v_0}{\sqrt[4]{v_0^2 + 2gx}} = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}}$$

alles en iedereen is positief verondersteld, dus worteltrekken kan naar hartelust.

Opmerkingen: Eenvoudige algebra.

- 7 Met $r_0 = 0,01$, $h_0 = 0,3$, $v_0 = 0,5$, en $g = 9,81$ moet het volume van het wentellichaam van de grafiek van r , voor $0 \leq x \leq 0,3$ berekend worden.

Uitwerking: We stellen het invullen even uit want met de letters primitiveert het wat makkelijker. We moeten $\pi \int_0^{0,3} r^2(x) dx$ berekenen en dat wordt

$$\pi \int_0^{0,3} r_0^2 \cdot v_0 \cdot (v_0^2 + 2gx)^{-\frac{1}{2}} dx = \pi r_0^2 \cdot v_0 \left[\frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gx} \right]_0^{0,3} = \pi \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}g} - \frac{1}{2} \right)$$

Dit is alles in m^3 , het antwoord moet op hele cm^3 afgerond worden. (Er komt $0,00003165763179 \text{ m}^3$, dat is $31,65 \text{ cm}^3$, afgerond 32 cm^3 dus.)

Opmerkingen: Deze integraal kan zonder meer ‘gewoon’ uitgerekend worden; ik vind de modeluitwerking, met alle constanten ingevuld, een stuk minder overzichtelijk.

- 8 Gevraagd: de oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafieken van $\sin x$ en $\sin^2 x$ met $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Uitwerking: Integreren:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \sin^2 x \, dx = \left[-\cos x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(via $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ natuurlijk).

Opmerkingen: Niet moeilijk.

- 9 Gevraagd de maximale waarde van $\sin x - \sin^2 x$ voor $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Uitwerking: Als eerder kan men $u = \sin x$ substitueren en $u - u^2$ maximaliseren. Symmetrie, of kwadraat afsplitsen, of differentiëren, geeft een maximum van $\frac{1}{4}$ bij $u = \frac{1}{2}$ ofwel bij $x = \frac{\pi}{6}$.

Opmerkingen: De functie zelf differentiëren kan natuurlijk ook.

- 10 De vraag is de wet van Arrhenius

$$k = A \cdot e^{-\frac{E}{8,314T}}$$

om te bouwen tot

$$E = 8,314T \cdot \ln \frac{A}{k}$$

Uitwerking: Dat is eenvoudige algebra: er geldt $-\frac{E}{8,314T} = \ln \frac{k}{A}$ ofwel $\frac{E}{8,314T} = \ln \frac{A}{k}$. Vermenigvuldig nu met $8,314T$.

- 11 Uit twee gegevens, namelijk $k = 2,7 \cdot 10^{-2}$ als $T = 500$, en $k = 2,4 \cdot 10^{-1}$ als $T = 550$ moet E bepaald worden.

Uitwerking: De gegevens leiden tot twee vergelijkingen: $E = 8,314 \cdot 500(\ln A - \ln(2,7 \cdot 10^{-2}))$ en $E = 8,314 \cdot 550(\ln A - \ln(2,4 \cdot 10^{-1}))$.

Vermenigvuldig de eerste met 11 en de tweede met 10 en trek af, er komt

$$E = 8,314 \cdot 5500(\ln 0,24 - \ln 0,027)$$

Nu nog met een rekenmachien schrijven als $a \cdot 10^5$, met a tot op één decimaal nauwkeurig. (Dat wordt $99904,44369 \approx 100.000$.)

Opmerkingen: Ik vind de ‘modeloplossingen’ nogal bewerkelijk. Vooral de eerste: die begint met de twee rechterleden aan elkaar gelijk te stellen waardoor de gezochte onbekende, E , uit het zicht verdwijnt.

- 12 Bewijs dat de raaklijn aan de eenheidscirkel in $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ de lijn $y = -1$ snijdt bij $x = (1 + \sin \alpha) / \cos \alpha$.

Uitwerking: Het snelst gaat dit met de normaalvergelijking van die raaklijn:

$$\cos \alpha(x - \cos \alpha) + \sin \alpha(y - \sin \alpha) = 0.$$

Vul $y = -1$ in en werk uit: $x \cos \alpha - \cos^2 \alpha - \sin \alpha - \sin^2 \alpha = 0$, dus $x \cos \alpha = 1 + \sin \alpha$.

Opmerkingen: Niet moeilijk, de modeloplossing is een heel gedoe; eerst met $\sin \alpha$ vermenigvuldigen spaart heel wat tijd.

- 13 We hebben $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $Q = (-\cos \alpha, \sin \alpha)$, $A = (0, -1)$ en S is het snijpunt uit de vorige opgave. Er is een α waarvoor PQ en AS even lang zijn. Bepaal de omtrek van $PQAS$ voor die α .

Uitwerking: De lengte van PQ is gelijk aan $2 \cos \alpha$, de lengte van AS is $(1 + \sin \alpha) / \cos \alpha$.

Gelijkstellen: $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \alpha$ of $2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$. Ontbinden: $(2 \sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1) = 0$. Dus $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ want $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Invullen: $P = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $Q = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $S = (\sqrt{3}, -1)$. Allevier lengten zijn gelijk aan $\sqrt{3}$, het totaal is dus $4\sqrt{3}$.

Opmerkingen: Niet moeilijk.

- 14 Zie het examenblad voor de tekening en de betekenis van de letters. Te bewijzen $AMSC$ is een koordenvierhoek.

Uitwerking: Omdat M en S op de middelloodlijn van A en B liggen geldt $\angle AMS = \angle BMS$. En omdat M het middelpunt van de omgeschreven cirkel is geldt $MA = MB = MC$ en dus $\angle MCS = \angle MCB = \angle MBC = \angle MBS$.

Via een gestrekte hoek volgt $\angle MSC = \angle BMS + \angle MBS$ en dus $\angle MSC = \angle AMS + \angle MCS$. Tel links en rechts $\angle MAC$ op: $\angle MAC + \angle MSC = \angle MAC + \angle MCS + \angle AMS$.

Maar $\angle MAC = \angle MCA$ en dus $\angle MAC + \angle MCS = \angle ACS$. We vinden

$$\angle MAC + \angle MSC = \angle ACS + \angle AMS.$$

Dat impliceert dat we een koordenvierhoek hebben: linker-en rechterlid zijn even groot en samen 2π , dus elk gelijk aan π .

Opmerkingen: Niet moeilijk, weer wat hoeken jagen. Mijn oplossing staat niet bij de modellen.