EINDEXAMEN WISKUNDE B, 2018-06-20

1 We moeten bewijzen dat
$$\frac{-2x+2\sqrt{x+1}}{x}=\frac{2}{1+\sqrt{x+1}}$$
voor $x\neq 0$.
Uitwerking: Je kunt $f(x)/h(x)$ uitwerken (de linkerkant heet $f(x)$, de rechter heet $h(x)$):
$$\frac{2}{x}\cdot(\sqrt{x+1}-1)\cdot(\sqrt{x+1}+1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{x+1-1}{x}=1$$
Zolang $x\geqslant -1$ en $x\neq 0$ is dit geoorloofd.
Aftrekken kan ook:
$$2\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=2\frac{x+1-1-x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=0$$
Opmerkingen: Een pedanterik zou zeggen dat $x\neq 0$ niet voldoende is. Verder vraag ik me af wat dit test. Rekenvaardigheid?
Mijn oplossingen staan niet bij het correctievoorschrift; de laatste twee oplossingen die in dat voorschrift staan zijn, logisch gezien, dubieus.

2 We krijgen ook nog de functie g gegeven door $g(x)=\frac{1}{x}(4x^2+x)$ en de informatie dat g voor $x\neq 0$ samenvalt met een eerstegraadsfunctie k, en dat f en g in $(0,1)$ een gemeenschappelijke perforatie hebben. Te bewijzen: de grafieken van f en g staan in die perforatie loodrecht op elkaar (ook nog vermeld, vermoedelijk als een soort definitie: dat geldt als de grafieken van h en k elkaar daar loodrecht snijden).
Uitwerking: Voor $x\neq 0$ geldt natuurlijk $g(x)=4x+1$ dus de richtingscoëfficiënt van de grafiek van k is gelijk aan 4. Verder reken je zo uit dat $h'(0)=-\frac{1}{4}$. Het product van de richtingscoëfficiënten (van de raaklijnen) is dus gelijk aan -1 en dat geeft loodrechte stand.
Opmerkingen: Een vraag zonder kraak of smaak; alles is al voorgekauwd.

3 Bij een (ijs)bol met volume $27\,\mathrm{cm}^3$ moet de verhouding tussen oppervlakte en volume bepaald worden.
Uitwerking: We krijgen
$$\frac{A}{V}=\frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^r}=\frac{3}{r}$$
Dan kunnen we r vinden uit $4\pi r^3=3\cdot 27$ en dus $r=3\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$. Dus de verhouding is gelijk aan
$$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$$
en Maple geeft 1.611991955 als benadering.
Opmerkingen: Ook hier is eigenlijk alles al klaargezet.

4 Een ijsbol met een straal van 1.5 cm drijft in water. Gegeven is: 92 % van de bol ligt onder water en dus 8 % steekt boven het water uit; verder is al een benadering van het volume gegeven: $\frac{4}{3}\pi 1.5^3\approx 14.137\,\mathrm{cm}^3$. De vraag is hoeveel centimeter de bol boven het water uitsteekt.
Uitwerking: We hebben ook nog meegekregen dat de bol als het omwentelingslichaam van de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=2.25$ om de y-as beschouwt kan worden. Het volume van het kapje dat boven het water uitsteekt is dan gelijk aan
$$\pi\int_a^{\frac{3}{2}}\frac{9}{4}-y^2\,\mathrm{d}y$$
Hierbij is a het niveau van het water, gemeten ten opzichte van het middelpunt. De integraal is gelijk aan
$$\pi\left[\frac{9}{4}y-\frac{1}{3}y^3\right]_a^{\frac{3}{2}}=\pi\left(\frac{27}{8}-\frac{1}{3}\frac{27}{8}-\frac{9}{4}a+\frac{1}{3}a^3\right)=\pi\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}a+\frac{1}{3}a^3\right)$$
Dit moet dus 8 % van het totale volume, $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3$, zijn, en dat is gelijk aan $\frac{9}{25}\pi$. Als je even exact doorrekent krijg je de volgende vergelijking voor a:
$$4a^3-27a+27=\frac{108}{25}$$

Numeriek op laten lossen door Maple geeft $a = 0.9790164504$; dus de bol steekt 0.5209835496 cm boven het water uit.
Opmerkingen: Op zich niet moeilijk; ik vraag me af hoeveel rekenfouten hier op de loer hebben gelegen. Ik zie dat ik hem niet volgens het correctievoorschrift zou hebben kunnen maken; ik weet niet hoe een grafische rekenmachien een vergelijking als $\pi \int_a^{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} - y^2 \, dy = \frac{9}{25}\pi$ oplost.

5 Gegeven wordt dat de straal van de bol lineair afneemt. Op $t = 0$ is de straal gelijk aan 1.5 cm, en op $t = 10$ is het volume van de bol gehalveerd (tijd in minuten). Wanneer, in hele minuten, is de bol weggesmolten.
Uitwerking: Als het volume gehalveerd is dan is de straal niet gehalveerd maar door $\sqrt[3]{2}$ gedeeld. We kunnen de lineaire functie dus opschrijven:

$$r(t) = \frac{3}{2} + \frac{3}{20}\left(\frac{1 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\right) t$$

Als we $r(t) = 0$ exact oplossen dan komt er $t = 10 \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$, en dat is ongeveer 48.47322100. Het antwoord op de vraag — op welke hele minuut is er geen ijs meer — is dus 49.
Opmerkingen: Even oppassen dat je niet denkt dat op $t = 10$ de straal gehalveerd is.

6 Gegeven een geparametriseerde familie functies: $f_a(x) = x - x\ln(ax)$ $(a > 0)$. Bewijs dat f_1 altijd het gemiddelde van f_a en $f_{\frac{1}{a}}$ is.
Uitwerking: Gewoon uitschrijven en gebruik $\ln(ax) = \ln a + \ln x$:

$$f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln a - x\ln x + x - x\ln\frac{1}{a} - x\ln x = 2x - 2x\ln x = 2f_1(x)$$

want $\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

7 Bepaal voor elke a de x-coördinaten van het positieve nulpunt van f_a en van de top van f_a en noem deze respectievelijk x_S en x_T. Laat zien dat de verhouding x_s/x_T constant is.
Uitwerking: Het positieve nulpunt van f_a is de oplossing van $1 = \ln ax$ en dus $x_S = e/a$. Verder geldt $f_a'(x) = -\ln x - \ln a$, dus $x_T = 1/a$. Het quotiënt is dus altijd gelijk aan e.
Opmerkingen: Niet moeilijk maar een pedanterik zou ook "Dat is duidelijk" kunnen hebben schrijven: de vraag luidt letterlijk: "Bewijs dat voor elke positieve waarde van a de verhouding x_S/x_T constant is." Dat is duidelijk want bij vaste a zijn x_S en x_T ook vast.

8 Gegeven een vierkant met hoekpunten $A = (8, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (-4, -4)$, en $D = (4, -8)$. Verder $P = (2, 3)$ op de zijde AB. Bepaal een vergelijking van de cirkel door B, C en P.
Uitwerking: De driehoek PBC is rechthoekig (rechte hoek bij B), dus het middelpunt is het midden van PC en de straal is de helft van de lengte van PC. We vinden $M = (-1, -\frac{1}{2})$ en $R = \sqrt{9 + \frac{49}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$. Een vergelijking is dus $(x + 3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{85}{4}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

9 Bepaal nu Q op DP zó dat $CQ \perp DP$.
Uitwerking: Er geldt $P - D = (-2, 11)$ dus $Q = (4-2\lambda, -8+11\lambda)$. Nu zorgen dat het inwendig product van $Q - C$ en $(-2, 11)$ gelijk is aan 0. Even $Q - C$ opschrijven: $(4-2\lambda+4, -8+11\lambda+4) = (8-2\lambda, -4+11\lambda)$; het inwendig product is $-16 + 4\lambda - 44 + 121\lambda = -60 + 125\lambda$. Dat is gelijk aan 0 als $\lambda = \frac{12}{25}$; daarmee vinden we $Q = (\frac{76}{25}, -\frac{68}{25})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; oppassen met de breuken.

10 Bepaal Q zó dat de oppervlakte van driehoek CDQ éénderde deel van de oppervlakte van het vierkant $ABCD$ is.
Uitwerking: De zijden van het vierkant zijn $\sqrt{8^2 + 4^2}$ lang, dat is $\sqrt{80}$. De basis CD van driehoek CDQ is ook zo lang. Om de oppervlakte van de driehoek (basis maal halve hoogte) gelijk te krijgen aan éénderde van die van het vierkant moet de hoogte van de driehoek dus gelijk zijn aan $\frac{2}{3}\sqrt{80}$. De lijn door C en D heeft als vergelijking $x + 2y = -12$. We gebruiken de formule voor de afstand van Q tot die lijn:

$$\frac{|x_Q + 2y_Q - (-12)|}{\sqrt{5}}$$

Vul in, in de teller komt er $(4-2\lambda)+2(-8+11\lambda)+12=20\lambda$. Dus $\frac{20\lambda}{\sqrt{5}}$ moet gelijk zijn aan $\frac{2}{3}\sqrt{80}$. Dat geeft $\lambda=\frac{2}{3}$, en dus $Q=(\frac{8}{3},-\frac{2}{3})$.
Opmerkingen: Wel aardig, hier moeten een paar dingen tegelijk worden gedaan: oppervlakte driehoek, afstand tot lijn.
En, ..., zoals Gerard Koolstra opmerkte, dat $\lambda=\frac{2}{3}$ is meteen duidelijk omdat Q op een rechte ligt die onder- en bovenkant verbindt.

11 Gegeven $f(x)=x^2$. In $P=(p,p^2)$ (met $p>0$) trekken we de raaklijn aan de grafiek; deze snijdt de x-as in A. De lijn van O naar P en de grafiek van f sluiten het vlakdeel V in. Te bewijzen: de oppervlakte van driehoek OAP is anderhalf maal die van het vlakdeel V.
Uitwerking: Het punt A heeft coördinaten $(\frac{1}{2}p,0)$ (ik weet niet of dit voor parabolen welbekend is, maar het snijpunt is ook snel te berekenen). De oppervlakte van de driehoek is dus gelijk aan $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}p\cdot p^2$ en dat is $\frac{1}{4}p^3$. Het vlakdeel V heet oppervlakte

$$\int_0^p px-x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}px^2-\frac{1}{3}p^3\right]_0^p=\frac{1}{6}p^3$$

De verhouding van de oppervlakten is dus $\frac{1}{4}\,/\,\frac{1}{6}$ en dat is $\frac{3}{2}$.
Opmerkingen: Vrij eenvoudig.

12 Deze opgave en de volgende twee gaan over de kromme bepaald door

$$\begin{cases} x(t)=\cos t\,\sin 2t \\ y(t)=\cos t \end{cases}$$

met $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. We noteren $P_t=\big(x(t),y(t)\big)$. We laten $t=\frac{1}{2}\pi$ en $t=\frac{3}{2}\pi$ buiten beschouwing omdat dan $P_t=(0,0)$. Bewijs: voor elke a is de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ verticaal.
Uitwerking: Er geldt $x(\pi-a)=\cos(\pi-a)\cdot\sin(2\pi-2a)$, met eenvoudige gonioformules maken we daar $-\cos a\cdot-\sin 2a$ van en dat is gelijk aan $x(a)$. Dus P_a en $P_{\pi-a}$ hebben gelijke x-coördinaat, en dat is genoeg.
Opmerkingen: Eenvoudige gonio.

13 Bereken het vierde tijdstip waarop de afstand van P_t tot de x-as gelijk is aan tweemaal de afstand van P_t tot de y-as.
Uitwerking: De eis vertaalt zich tot $\big|y(t)\big|=2\big|x(t)\big|$ en dus tot $|\cos t|=2|\sin 2t|\cdot|\cos t|$. Omdat we $\cos t=0$ hebben uitgesloten volgt dat $1=2|\sin 2t|$, ofwel $\sin 2t=\pm\frac{1}{2}$. Dat geeft vier mogelijkheden voor $2t$, namelijk $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, en $\frac{11}{6}\pi$. De vier oplossingen voor t zijn dus $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{12}\pi$, en $\frac{11}{12}\pi$. Die laatste moeten we dus hebben.
Opmerkingen: Even opletten en niet $\big|x(t)\big|=2\big|y(t)\big|$ gaan oplossen.

14 Bewijs dat op tijdstip $t=\frac{3}{4}\pi$ de plaats- en snelheidsvector gelijk zijn.
Uitwerking: Ten eerste $P_{\frac{3}{4}\pi}=(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2})$. Ten tweede $x'(t)=-\sin t\cdot\sin 2t+\cos t\cdot 2\cos 2t$, en dus $x'(\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot-1+(-\frac{1}{2}\sqrt{2})\cdot2\cdot0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $y'(t)=-\sin t$, en dus $y'(\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$. De snelheidsvector is dus inderdaad gelijk aan de plaatsvector.
Opmerkingen: Een beetje flauw eigenlijk.

15 Gegeven het vierkant $OABC$ met $O=(0,0)$, $A=(4,0)$ en $C=(0,4)$. Het snijpunt van OS en AC noemen we S. Verder nemen we $M=(3,2)$ als middelpunt van een cirkel door A en B. De cirkel snijdt OS in G en CS in F. Bewijs dat F het midden van CS is.
Uitwerking: Er geldt $|AM|=|BM|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Er geldt ook dat de afstand tussen $(1,3)$ (het midden van CS) en $(3,2)$ gelijk is aan $\sqrt{5}$. Dus F is gelijk aan dat midden.
Alternatief: Een vergelijking voor de cirkel is dus $(x-3)^2+(y-2)^2=5$. De lijn door C en S heeft vergelijking $x+y=4$. Stop $y=4-x$ in de vergelijking van de cirkel: $(x-3)^2+(2-x)^2=5$. Je kunt de oplossingen $x=1$ en $x=4$ met het blote oog zien. Bij $x=4$ hoort A en bij $x=1$ hoort dus F, dus $F=(1,3)$ en dat ligt inderdaad midden tussen S en C.
Opmerkingen: Wel aardig.

16 Om redenen van symmetrie is G natuurlijk het midden van OS. Te bewijzen is nu dat de sectoren BMF en AMG van de cirkel(schijf) samen de helft van de oppervlakte van de cirkel(schijf) vormen.
Uitwerking: Er geldt $F - M = (-2, 1)$ en $B - M = (1, 2)$ en als je $B - M$ tegen de klok in over een rechte hoek draait krijg je $F - M$. Dus BMF is een kwart van de cirkel(schijf). Idem: AMG is ook een kwart van de cirkel(schijf).
Opmerkingen: Loodrechte stand is niet genoeg; dat zou ook driekwart van de schijf op kunnen leveren. Verder wordt 'cirkel' in deze vragen in twee betekenissen gebruikt: als de kromme en als het ingesloten vlakdeel.
De uitwerkingen in het correctievoorschrift zijn alle onvolledig: de loodrechte stand wordt wel aangetoond, maar niet dat de oriëntatie van de hoek zo is dat je een kwart cirkel(schijf) krijgt.