EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2019-05-20

1 Snijpunten berekenen van de cirkel om $(1,7)$ met straal 5 en de lijn met vectorvoorstellin $\binom{x}{y} = t\binom{1}{2}$.
Uitwerking: Invullen: $(t-1)^2 + (2t-7)^2 = 25$ en uitwerken: $5t^2 - 30t + 25 = 0$ ofwel, na ontbinden: $5(t-5)(t-1) = 0$. We krijgen twee snijpunten: $(1,2)$ (bij $t=1$) en $(5,10)$ (bij $t=5$).
Opmerkingen: Niets bijzonders.

2 Gegeven $f(x) = 3\cos 2x - \sqrt{2x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{2x}$. Het sijpunt van de grafiek van g met de x-as is A, de derde top van de grafiek van f, geteld vanaf 0 naar rechts, is B. Aan te tonen: B ligt rechts van A.
Uitwerking: De coördinaten van A zijn $(\frac{9}{2}, 0)$. Uit de gegeven grafiek lezen we af dat f in B een minimum heeft en dat het volstaat te laten zien dat f recht onder A dalend is, dus dat $f'(\frac{9}{2}) < 0$.
Er geldt $f'(x) = -6\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{2x}}$, en dus $f'(\frac{9}{2}) = -6\sin 9 - \frac{1}{3} \approx -2{,}80604424$.
Alternatief: benader de nulpunten van $f'(x)$ en laat zien dat het derde groter is dan $\frac{9}{2}$. Dat derde nulpunt is ongeveer 4,739469142.
Opmerkingen: Wel aardig, maar ik vind het niet prettig me te laten leiden door een plaatje. Het plaatje suggereert nog wel een andere opgave: laat zien/beredeneer dat de lokale maxima van f *niet* op de grafiek van g liggen.

3 De lijn $y = x + \frac{1}{4}$ raakt de grafiek van f_p, voor elke $p \geqslant 1$, waarbij $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$.
Uitwerking: We moeten dus kijken waar op de grafiek van f_p de helling van de raaklijn gelijk is aan die van de lijn, aan 1 dus. Welnu, $f_p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-p}}$, en dat is gelijk aan 1 als $2\sqrt{x-p} = 1$, ofwel $\sqrt{x-p} = \frac{1}{2}$. Maar dat is zo als $x = p + \frac{1}{4}$, en $f_p(p+\frac{1}{4}) = p + \frac{1}{2}$, dus inderdaad: het punt op de grafiek van f_p waar de helling gelijk is aan 1 ligt op de gegeven lijn.
Opmerkingen: Niet moeilijk, je kunt je ook realiseren dat op de grafiek van $\sqrt{x}$ de helling in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ gelijk is aan 1 en dat f_p gewoon $\sqrt{x}$ is, opgeschoven over (p,p), het mee opgeschoven punt $(p+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{2})$ ligt op de gegeven lijn.

4 Het randpunt/beginpunt van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.
Uitwerking: Dat punt is (p,p) en $f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p-(p-1)} = p$.
Opmerkingen: Flauw

5 De oppervlakte berekenen van het vlakdeel ingesloten door de verbindingslijn van $(1,1)$ en $(2,2)$ (de randpunten van f_1 en f_2 dus) en de grafiek van f_1.
Uitwerking: De verbindingslijn heeft vergelijking $y = x$, we moeten dus $\int_1^2 f_1(x) - x\,\mathrm{d}x$ uitrekenen. En dat gaat zo

$$\int_1^2 f_1(x) - x\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{x-1} - (x-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Opmerkingen: Niet moeilijk, je kunt ook terugschijven naar $\sqrt{x}$ en $\int_0^1 \sqrt{x} - x\,\mathrm{d}x$ uitrekenen. Ik vraag me wel af of het nodig was die hele geparametriseerde familie te nemen; er werd niet echts iets spannends met die parameter gedaan.

6 De kracht bepalen die elk van de twee koorden van een 'Slingshot' op de capsule uitoefend als deze op de grond staat.
Uitwerking: De formule is $F_k = 0{,}6 \cdot (L-8)\,\mathrm{kN}$, met L de lengte van het koord. De waarde van L volgt met behulp van de stelling van Pythagoras: uit het plaatje halen we $L^2 = 20^2 + 7^2$, dus $L = \sqrt{449}$. Mijn GR heet Maple en die maakt 7,91377206 van $0{,}6 \cdot (\sqrt{449} - 8)$. Op één decimaal: 7,9 kN.
Opmerkingen: Niet moeilijk. Overigens weerspreekt de foto de gegevens in het examen: de palen zijn duidelijk niet parallel, ze staan dus zeker niet allebei verticaal.

7 Gegeven de formule $F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos\alpha$ voor de totale opwaartse kracht uitgeoefend op de capsule (α de hoek met de verticaal). We moeten die kracht uitdrukken in x, het hoogteverschil met de toppen van de palen, en bepalen hoe hoog de capsule in rust hangt. Gegeven is ook dat $F_z = 1{,}8\,\mathrm{kN}$ (zwaartekracht op de capsule).

Uitwerking: De lengte L hangt via Pythagoras van x af: $L^2 = 7^2 + x^2$, of $L = \sqrt{x^2 + 49}$. Verder geldt $\cos\alpha = \frac{x}{L}$. We vinden dus dat

$$F_{kv} = 1{,}2 \cdot (L-8) \cdot \frac{x}{L} = 1{,}2 \cdot \left(\sqrt{x^2+49} - 8\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+49}}$$

De vergelijking $F_{kv} = 18$ lost Maple bij benadering op: $x \approx 7{,}258441927$. Afgerond op hele meters hangt de capsule in rust dus 13 m boven de grond.
Opmerkingen: Geen slechte som. Wel zorgvuldig opschrijven.

8 Gegeven $f(x) = x\ln x - x + 1$ en $g(x) = f'(x)$. Bereken de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.
Uitwerking: Omdat $g(x) = \ln x$ moeten we dus $x\ln x - x + 1 = \ln x$ oplossen. Dat kun je omwerken tot $(x-1)(\ln x - 1) = 0$. De (exacte) oplossing zijn dus $x = 1$ en $x = \mathrm{e}$.
Opmerkingen: Eenvoudige algebra.

9 Nu p bepalen zó dat $\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Uitwerking: Dat wordt dus $f(2p) - f(p) = 0$ oplossen. Even uitschrijven: $2p\ln(2p) - 2p - p\ln p + p = 0$, verder uitwerken ($p$ kan buiten de haken): $p(\ln p + 2\ln 2 - 1) = 0$. De mogelijkheid $p = 0$ valt af (of niet, $\int_0^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$). Blijft over $\ln p + \ln\frac{4}{\mathrm{e}} = 0$, en dus $p = \frac{\mathrm{e}}{4}$. Het gevraagde antwoord is $a = \frac{1}{4}$ (het getal a zó dat $p = a\mathrm{e}$).
Opmerkingen: Weer: eenvoudige algebra. Plus doorhebben dat je g niet opnieuw moet gaan primitiveren.

10 We bekijken f gegeven door

$$f(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Bepaal de kleinste twee positieve x-en met $f(x) = \sqrt{2}$.
Uitwerking: Het snelst gaat dit via $-\cos x = \sqrt{2}\sin^2 x$ of $-\cos x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x$. Dat geeft een kwadratische vergelijking in $\cos x$:

$$\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0$$

Ontbinden: $(\sqrt{2}\cos x + 1)(\cos x - \sqrt{2}) = 0$, dus $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\cos x = \sqrt{2}$. De laatste valt af, dus moeten we nog $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oplossen. De eerste twee x-en zijn $\frac{3\pi}{4}$ en $\frac{5\pi}{4}$.
De *abc*-formule kan natuurlijk ook: $\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}}$ geeft dezelfde antwoorden.
Opmerkingen: Aardige combinatie van algebra en gonio. De echte formulering was nogal uitgebreid: "de grafiek van f snijdt de lijn $y = \sqrt{2}$ oneindig vaak, de twee snijpunten met kleinste positieve x-coördinaten heten A en B; bepaal de x-coördinaten van A en B". Ik ben daar niet zo'n liefhebber van; de punten A en B worden nergens echt gebruikt, dus waarom zou je die extra letters invoeren?

11 Nu wordt f uitgebreid met een parameter:

$$f_p(x) = \frac{\cos x}{p - \sin^2 x}$$

Onderzoek of er een p is zó dat de grafiek van f_p een perforatie heeft.
Uitwerking: Een perforatie duidt meestal op een $\frac{0}{0}$-situatie, we kijken dus of die op kan treden. Ten eerste: als $\cos x = 0$ dan $\sin^2 x = 1$ (want $\cos^2 + \sin^2 x = 1$); dan geeft $p - \sin^2 x = 0$ ons dat alleen $p = 1$ mogelijk is. Ten tweede

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

zolang $\cos x \neq 0$, maar deze functie heeft *geen* perforatie daar waar $\cos x = 0$, maar een verticale asymptoot.
Opmerkingen: Mooi.

12 Neem $p \neq 0$ en bekijk de punten P, Q en R op de grafiek van f_p met x-coördinaten achtereenvolgens 0, π en 2π. Voor welke p geldt $PQ \perp QR$?
Uitwerking: De y-coördinaten (functiewaarden) zijn achtereenvolgens $\frac{1}{p}$, $-\frac{1}{p}$ en $\frac{1}{p}$. De hellingen van PQ en QR zijn dus, respectievelijk, $-\frac{2}{p\pi}$ en $\frac{2}{p\pi}$. Hun product moet gelijk zijn aan -1. Dus $-\frac{4}{p^2\pi^2} = -1$, of $p^2\pi^2 = 4$. We vinden $p = \pm\frac{2}{\pi}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, hoop ik.

13 De lijn k gaat door $A = (0, 10)$ en $B = (40, 0)$. Het punt P ligt op de lijn m met parametrisering $x = 18 + 5t$, $y = 30 - 3t$. Bepaal de positie van P zó dat ABP een ontaarde driehoek is.
Uitwerking: Kortom P moet op k liggen; P moet het snijpunt van k en m zijn. Een vergelijking van k is $x + 4y = 40$. Vul de parametrisering in: $(18 + 5t) + 4(30 - 3t) = 40$. Of $-7t + 138 = 40$, of $7t = 98$, en dus $t = 14$. Dat geeft $P = (88, -12)$.
Opmerkingen: Een beetje overdreven manier om dat snijpunt te laten bepalen.

14 Is het mogelijk dat de driehoek ABP gelijkbenig is èn bij P een rechte hoek heeft?
Uitwerking: Als een rechthoekige driehoek gelijkbenig is dat zijn de rechthoekszijden de gelijke benen. We kunnen dus kijken waar $AP \perp BP$ of waar AP en BP even lang zijn.
De laatste mogelijkheid gaat als volgt: de middelloodlijn van A en B heeft vergelijking $4x - y = 75$. Snijden met m geeft $4(18 + 5t) - (30 - 3t) = 75$ of $t = \frac{33}{23}$. Dat geeft $P = \frac{1}{23}(579, 591)$. Het inwendig product van $P - A$ en $P - B$ is gelijk aan $\frac{15912}{529}$ en dat is in ieder geval ongelijk aan 0. Dus als de benen AP en BP gelijk zijn is de hoek bij P niet recht.
De eerste mogelijkheid neem het inwendig product van $P - A$ en $P - B$ en kijkt wanneer dat gelijk is aan 0. Dat geeft $34t^2 - 170t + 204 = 0$, met oplossingen $t = 3$ en $t = 2$ en punten $P_3 = (33, 21)$ en $P_2 = (28, 24)$. De afstanden tot A en B zijn in beide gevallen niet gelijk: $11\sqrt{10}$ versus $7\sqrt{10}$ dan wel $14\sqrt{5}$ versus $12\sqrt{5}$.
Hoe dan ook: er is niet zo'n punt P.
Opmerkingen: Aardige analytische meetkunde.

15 Na een heel verhaal over het wentellichaam van $\sqrt{x}$ om de x-as moet aangetoond worden dat, bij gegeven (positieve) a and b met $a < b$. De inhoud van het lichaam tussen $x = a$ en $x = b$ gelijk is aan $h \cdot A$, waar $h = b - a$ en waar A de oppervlakte is van de plak van het lichaam bij $x = \frac{1}{2}(a + b)$.
Uitwerking: De inhoud is gelijk aan

$$\pi \int_a^b (\sqrt{x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$$

De oppervlakte A is, via πr^2, gelijk aan $\pi \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + b)}\right)^2 = \frac{\pi}{2}(a + b)$, en dus $h \cdot A = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$ als gevraagd.
Opmerkingen: Eigenlijk heel flauw, als je de wentelformule kent natuurlijk, maar ik vond het hele verhaal om deze som heen wel wat overdreven. Zo werd $\frac{1}{2}(a+b)$ onderweg nog m genoemd: onderdeel van het leeswerk was nog dat we uit '$(m, 0)$ ligt midden tussen $(a, 0)$ en $(b, 0)$' moesten halen dat $m = \frac{1}{2}(a+b)$ en verder werd h indirect beschreven als de hoogte van het lichaam nadat het een kwartslag gekanteld was.