

EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2019-05-20

- 1 Snijpunten berekenen van de cirkel om $(1, 7)$ met straal 5 en de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Uitwerking: Invullen: $(t - 1)^2 + (2t - 7)^2 = 25$ en uitwerken: $5t^2 - 30t + 25 = 0$ ofwel, na ontbinden: $5(t - 5)(t - 1) = 0$. We krijgen twee snijpunten: $(1, 2)$ (bij $t = 1$) en $(5, 10)$ (bij $t = 5$).
Opmerkingen: Niets bijzonders.
- 2 Gegeven $f(x) = 3 \cos 2x - \sqrt{2x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{2x}$. Het sijpunt van de grafiek van g met de x -as is A , de derde top van de grafiek van f , geteld vanaf 0 naar rechts, is B . Aan te tonen: B ligt rechts van A .
Uitwerking: De coördinaten van A zijn $(\frac{9}{2}, 0)$. Uit de gegeven grafiek lezen we af dat f in B een minimum heeft en dat het volstaat te laten zien dat f recht onder A dalend is, dus dat $f'(\frac{9}{2}) < 0$.
 Er geldt $f'(x) = -6 \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{2x}}$, en dus $f'(\frac{9}{2}) = -6 \sin 9 - \frac{1}{3} \approx -2,80604424$.
 Alternatief: benader de nulpunten van $f'(x)$ en laat zien dat het derde groter is dan $\frac{9}{2}$. Dat derde nulpunt is ongeveer 4,739469142.
Opmerkingen: Wel aardig, maar ik vind het niet prettig me te laten leiden door een plaatje. Het plaatje suggereert nog wel een andere opgave: laat zien/beredeneer dat de lokale maxima van f *niet* op de grafiek van g liggen.
- 3 De lijn $y = x + \frac{1}{4}$ raakt de grafiek van f_p , voor elke $p \geq 1$, waarbij $f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$.
Uitwerking: We moeten dus kijken waar op de grafiek van f_p de helling van de raaklijn gelijk is aan die van de lijn, aan 1 dus. Welnu, $f'_p(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-p}}$, en dat is gelijk aan 1 als $2\sqrt{x-p} = 1$, ofwel $\sqrt{x-p} = \frac{1}{2}$. Maar dat is zo als $x = p + \frac{1}{4}$, en $f_p(p + \frac{1}{4}) = p + \frac{1}{2}$, dus inderdaad: het punt op de grafiek van f_p waar de helling gelijk is aan 1 ligt op de gegeven lijn.
Opmerkingen: Niet moeilijk, je kunt je ook realiseren dat op de grafiek van \sqrt{x} de helling in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ gelijk is aan 1 en dat f_p gewoon \sqrt{x} is, opgeschoven over (p, p) , het mee opgeschoven punt $(p + \frac{1}{4}, p + \frac{1}{2})$ ligt op de gegeven lijn.
- 4 Het randpunt/beginpunt van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1} .
Uitwerking: Dat punt is (p, p) en $f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - (p - 1)} = p$.
Opmerkingen: Flauw
- 5 De oppervlakte berekenen van het vlakdeel ingesloten door de verbindingslijn van $(1, 1)$ en $(2, 2)$ (de randpunten van f_1 en f_2 dus) en de grafiek van f_1 .
Uitwerking: De verbindingslijn heeft vergelijking $y = x$, we moeten dus $\int_1^2 f_1(x) - x \, dx$ uitrekenen. En dat gaat zo
- $$\int_1^2 f_1(x) - x \, dx = \int_1^2 \sqrt{x-1} - (x-1) \, dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
- Opmerkingen:** Niet moeilijk, je kunt ook terugschrijven naar \sqrt{x} en $\int_0^1 \sqrt{x} - x \, dx$ uitrekenen. Ik vraag me wel af of het nodig was die hele geparametriseerde familie te nemen; er werd niet echt iets spannends met die parameter gedaan.
- 6 De kracht bepalen die elk van de twee koorden van een ‘Slingshot’ op de capsule uitoefend als deze op de grond staat.
Uitwerking: De formule is $F_k = 0,6 \cdot (L - 8)$ kN, met L de lengte van het koord. De waarde van L volgt met behulp van de stelling van Pythagoras: uit het plaatje halen we $L^2 = 20^2 + 7^2$, dus $L = \sqrt{449}$. Mijn GR heet Maple en die maakt 7,91377206 van $0,6 \cdot (\sqrt{449} - 8)$. Op één decimaal: 7,9 kN.
Opmerkingen: Niet moeilijk. Overigens weerspreekt de foto de gegevens in het examen: de palen zijn duidelijk niet parallel, ze staan dus zeker niet allebei verticaal.
- 7 Gegeven de formule $F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos \alpha$ voor de totale opwaartse kracht uitgeoefend op de capsule (α de hoek met de verticaal). We moeten die kracht uitdrukken in x , het hoogteverschil met de toppen van de palen, en bepalen hoe hoog de capsule in rust hangt. Gegeven is ook dat $F_z = 1,8$ kN (zwaartekracht op de capsule).

Uitwerking: De lengte L hangt via Pythagoras van x af: $L^2 = 7^2 + x^2$, of $L = \sqrt{x^2 + 49}$. Verder geldt $\cos \alpha = \frac{x}{L}$. We vinden dus dat

$$F_{kv} = 1,2 \cdot (L - 8) \cdot \frac{x}{L} = 1,2 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$$

De vergelijking $F_{kv} = 18$ lost Maple bij benadering op: $x \approx 7,258441927$. Afgerond op hele meters hangt de capsule in rust dus 13 m boven de grond.

Opmerkingen: Geen slechte som. Wel zorgvuldig opschrijven.

- 8 Gegeven $f(x) = x \ln x - x + 1$ en $g(x) = f'(x)$. Bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

Uitwerking: Omdat $g(x) = \ln x$ moeten we dus $x \ln x - x + 1 = \ln x$ oplossen. Dat kun je omwerken tot $(x - 1)(\ln x - 1) = 0$. De (exacte) oplossing zijn dus $x = 1$ en $x = e$.

Opmerkingen: Eenvoudige algebra.

- 9 Nu p bepalen zó dat $\int_p^{2p} g(x) dx = 0$.

Uitwerking: Dat wordt dus $f(2p) - f(p) = 0$ oplossen. Even uitschrijven: $2p \ln(2p) - 2p - p \ln p + p = 0$, verder uitwerken (p kan buiten de haken): $p(\ln p + 2 \ln 2 - 1) = 0$. De mogelijkheid $p = 0$ valt af (of niet, $\int_0^0 g(x) dx = 0$). Blijft over $\ln p + \ln \frac{4}{e} = 0$, en dus $p = \frac{e}{4}$. Het gevraagde antwoord is $a = \frac{1}{4}$ (het getal a zó dat $p = ae$).

Opmerkingen: Weer: eenvoudige algebra. Plus doorhebben dat je g niet opnieuw moet gaan primitiveren.

- 10 We bekijken f gegeven door

$$f(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Bepaal de kleinste twee positieve x -en met $f(x) = \sqrt{2}$.

Uitwerking: Het snelst gaat dit via $-\cos x = \sqrt{2} \sin^2 x$ of $-\cos x = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cos^2 x$. Dat geeft een kwadratische vergelijking in $\cos x$:

$$\sqrt{2} \cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0$$

Ontbinden: $(\sqrt{2} \cos x + 1)(\cos x - \sqrt{2}) = 0$, dus $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ of $\cos x = \sqrt{2}$. De laatste valt af, dus moeten we nog $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ oplossen. De eerste twee x -en zijn $\frac{3\pi}{4}$ en $\frac{5\pi}{4}$.

De abc -formule kan natuurlijk ook: $\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}}$ geeft dezelfde antwoorden.

Opmerkingen: Aardige combinatie van algebra en gonio. De echte formulering was nogal uitgebreid: “de grafiek van f snijdt de lijn $y = \sqrt{2}$ oneindig vaak, de twee snijpunten met kleinste positieve x -coördinaten heten A en B ; bepaal de x -coördinaten van A en B ”. Ik ben daar niet zo’n liefhebber van; de punten A en B worden nergens echt gebruikt, dus waarom zou je die extra letters invoeren?

- 11 Nu wordt f uitgebreid met een parameter:

$$f_p(x) = \frac{\cos x}{p - \sin^2 x}$$

Onderzoek of er een p is zó dat de grafiek van f_p een perforatie heeft.

Uitwerking: Een perforatie duidt meestal op een $\frac{0}{0}$ -situatie, we kijken dus of die op kan treden. Ten eerste: als $\cos x = 0$ dan $\sin^2 x = 1$ (want $\cos^2 + \sin^2 x = 1$); dan geeft $p - \sin^2 x = 0$ ons dat alleen $p = 1$ mogelijk is. Ten tweede

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

zolang $\cos x \neq 0$, maar deze functie heeft *geen* perforatie daar waar $\cos x = 0$, maar een verticale asymptoot.

Opmerkingen: Mooi.

- 12 Neem $p \neq 0$ en bekijk de punten P , Q en R op de grafiek van f_p met x -coördinaten achtereenvolgens 0 , π en 2π . Voor welke p geldt $PQ \perp QR$?

Uitwerking: De y -coördinaten (functiewaarden) zijn achtereenvolgens $\frac{1}{p}$, $-\frac{1}{p}$ en $\frac{1}{p}$. De hellingen van PQ en QR zijn dus, respectievelijk, $-\frac{2}{p\pi}$ en $\frac{2}{p\pi}$. Hun product moet gelijk zijn aan -1 . Dus $-\frac{4}{p^2\pi^2} = -1$, of $p^2\pi^2 = 4$. We vinden $p = \pm \frac{2}{\pi}$.

Opmerkingen: Niet moeilijk, hoop ik.

- 13** De lijn k gaat door $A = (0, 10)$ en $B = (40, 0)$. Het punt P ligt op de lijn m met parametrisering $x = 18 + 5t$, $y = 30 - 3t$. Bepaal de positie van P zó dat ABP een ontaarde driehoek is.

Uitwerking: Kortom P moet op k liggen; P moet het snijpunt van k en m zijn. Een vergelijking van k is $x + 4y = 40$. Vul de parametrisering in: $(18 + 5t) + 4(30 - 3t) = 40$. Of $-7t + 138 = 40$, of $7t = 98$, en dus $t = 14$. Dat geeft $P = (88, -12)$.

Opmerkingen: Een beetje overdreven manier om dat snijpunt te laten bepalen.

- 14** Is het mogelijk dat de driehoek ABP gelijkbenig is en bij P een rechte hoek heeft?

Uitwerking: Als een rechthoekige driehoek gelijkbenig is dat zijn de rechthoekszijden de gelijke benen. We kunnen dus kijken waar $AP \perp BP$ of waar AP en BP even lang zijn.

De laatste mogelijkheid gaat als volgt: de middelloodlijn van A en B heeft vergelijking $4x - y = 75$. Snijden met m geeft $4(18 + 5t) - (30 - 3t) = 75$ of $t = \frac{33}{23}$. Dat geeft $P = \frac{1}{23}(579, 591)$. Het inwendig product van $P - A$ en $P - B$ is gelijk aan $\frac{15912}{529}$ en dat is in ieder geval ongelijk aan 0. Dus als de benen AP en BP gelijk zijn is de hoek bij P niet recht.

De eerste mogelijkheid neem het inwendig product van $P - A$ en $P - B$ en kijkt wanneer dat gelijk is aan 0. Dat geeft $34t^2 - 170t + 204 = 0$, met oplossingen $t = 3$ en $t = 2$ en punten $P_3 = (33, 21)$ en $P_2 = (28, 24)$. De afstanden tot A en B zijn in beide gevallen niet gelijk: $11\sqrt{10}$ versus $7\sqrt{10}$ dan wel $14\sqrt{5}$ versus $12\sqrt{5}$.

Hoe dan ook: er is niet zo'n punt P .

Opmerkingen: Aardige analytische meetkunde.

- 15** Na een heel verhaal over het wentellichaam van \sqrt{x} om de x -as moet aangetoond worden dat, bij gegeven (positieve) a and b met $a < b$. De inhoud van het lichaam tussen $x = a$ en $x = b$ gelijk is aan $h \cdot A$, waar $h = b - a$ en waar A de oppervlakte is van de plak van het lichaam bij $x = \frac{1}{2}(a + b)$.

Uitwerking: De inhoud is gelijk aan

$$\pi \int_a^b (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_a^b x dx = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$$

De oppervlakte A is, via πr^2 , gelijk aan $\pi \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)} \right)^2 = \frac{\pi}{2}(a+b)$, en dus $h \cdot A = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$ als gevraagd.

Opmerkingen: Eigenlijk heel flauw, als je de wentelformule kent natuurlijk, maar ik vond het hele verhaal om deze som heen wel wat overdreven. Zo werd $\frac{1}{2}(a+b)$ onderweg nog m genoemd: onderdeel van het leeswerk was nog dat we uit ' $(m, 0)$ ligt midden tussen $(a, 0)$ en $(b, 0)$ ' moesten halen dat $m = \frac{1}{2}(a+b)$ en verder werd h indirect beschreven als de hoogte van het lichaam nadat het een kwartslag gekanteld was.