

EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2019-06-19

- 1** De afstand van het punt $(7, 0)$ tot de grafiek van $y = x(x - 3)^2 + 2$ bepalen.
Uitwerking: We minimaliseren het kwadraat van de afstand van $(7, 0)$ tot een punt op de grafiek: $d(x) = (x - 7)^2 + (x(x - 3)^2 + 2 - 0)^2$. De afgeleide is $d'(x) = 6x^5 - 60x^4 + 216x^3 - 312x^2 + 116x + 22$. Afgeleide nul stellen geeft drie oplossingen: $-0,1354799774$, $0,8394102919$, en $3,251578837$. De laatste geeft de minimum afstand: $4,349276820$.
Opmerkingen: Dit is een oefening in opstellen, niet in oplossen. Aan de modeluitwerking te zien heb ik te veel laten uitrekenen.
- 2** Een kromme: $x(t) = \cos 2t - \sin 2t$ en $y(t) = \sin 2t - \sin t$. Bepaal het snijpunt van de kromme met de x -as dat links van de y -as ligt.
Uitwerking: Dus $y(t) = 0$ oplossen, en die t nemen waarvoor $x(t) < 0$. De vergelijking $\sin 2t = \sin t$ kan op een paar manieren. Bijvoorbeeld $2 \sin t \cos t - \sin t = 0$, ofwel $\sin t(2 \cos t - 1) = 0$. Dat geeft, in het interval $[0, 2\pi]$ vijf punten: $t = 0$, $t = \pi$, $t = 2\pi$, $t = \frac{\pi}{3}$ en $t = \frac{5\pi}{3}$. Van die vijf geeft $t = \frac{\pi}{3}$ als enige een negatieve x -coördinaat: $-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$.
Opmerkingen: Niet moeilijke gonio.
- 3** Nu de hoek bepalen tussen de raakvectoren op tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$ (dan gaat de kromme door het punt $(1, 0)$).
Uitwerking: De afgeleiden van x en y zijn: $x'(t) = -2(\sin 2t + \cos 2t)$ en $y'(t) = 2 \cos 2t - \cos t$. Bij $t = 0$ geeft dat de vector $(-2, 1)$; bij $t = \pi$ krijgen we $(-2, 3)$. De cosinus van de hoek is dus $\frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{13}}$. De hoek is ongeveer $0,52$ radialen.
Opmerkingen: Bij de opgave stond niet welke hoekmaat gebruikt moest worden. Het model deed graden.
- 4** De grafiek van f , gegeven door $f(x) = |x - 2| \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$ heeft een knik. Bepaal een vergelijking van de linkerraaklijn in het knikpunt.
Uitwerking: De knik treedt op bij $x = 2$, dankzij de factor $|x - 2|$. Het knikpunt is dus $(2, 1)$. Links van 2 geldt $f(x) = (2 - x) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$, met afgeleide $f'(x) = -x - 1$. Dus $f'(2) = -3$ (van links) en de raaklijn is gegeven door $y - 1 = -3(x - 2)$ (of $y = -3x + 7$).
Opmerkingen: Niet moeilijk; alleen opletten dat $|x - 2| = 2 - x$ links van 2 .
- 5** Het verband tussen boorsnelheid, V , en levenduur, T , van een boor is gegeven als $V \cdot T^m = C$ (met parameters m en C). Bepaal m en C als bekend is dat $V = 20$ en $T = 116$, en ook $V = 30$ en $T = 40$ samengaan.
Uitwerking: We hebben dus $20 \cdot 116^m = C$ en $30 \cdot 40^m = C$. Bijvoorbeeld met behulp van logaritmen: $\ln 20 + m \ln 116 = \ln C$, en $\ln 30 + m \ln 40 = \ln C$. Dat geeft $m = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 29 - \ln 10} \approx 0,3808$ en dan $C \approx 122$.
Opmerkingen: Alternatief: op elkaar delen: $\frac{2}{3} \cdot (\frac{29}{10})^m = 1$, daarna toch logaritmen nemen.
- 6** De kracht bepalen die elk van de twee koorden van een ‘Slingshot’ op de capsule uitoefend als deze op de grond staat.
Uitwerking: De formule is $F_k = 0,6 \cdot (L - 8)$ kN, met L de lengte van het koord. De waarde van L volgt met behulp van de stelling van Pythagoras: uit het plaatje halen we $L^2 = 20^2 + 7^2$, dus $L = \sqrt{449}$. Mijn GR heet Maple en die maakt $7,91377206$ van $0,6 \cdot (\sqrt{449} - 8)$. Op één decimaal: $7,9$ kN.
Opmerkingen: Niet moeilijk. Overigens weerspreekt de foto de gegevens in het examen: de palen zijn duidelijk niet parallel, ze staan dus zeker niet allebei verticaal.
- 7** Gegeven de formule $F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos \alpha$ voor de totale opwaartse kracht uitgeoefend op de capsule (α de hoek met de verticaal). We moeten die kracht uitdrukken in x , het hoogteverschil met de toppen van de palen, en bepalen hoe hoog de capsule in rust hangt. Gegeven is ook dat $F_z = 1,8$ kN (zwaartekracht op de capsule).
Uitwerking: De lengte L hangt via Pythagoras van x af: $L^2 = 7^2 + x^2$, of $L = \sqrt{x^2 + 49}$. Verder geldt $\cos \alpha = \frac{x}{L}$. We vinden dus dat

$$F_{kv} = 1,2 \cdot (L - 8) \cdot \frac{x}{L} = 1,2 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$$

De vergelijking $F_{kv} = 18$ lost Maple bij benadering op: $x \approx 7,258441927$. Afgerond op hele meters hangt de capsule in rust dus 13 m boven de grond.

Opmerkingen: Geen slechte som. Wel zorgvuldig opschrijven.

- 8 De oppervlakte onder de grafiek van $2 \in x$ tussen $x = p$ en $x = \pi - p$ is gelijk aan $4 \cos p$. NB $0 < p < \frac{\pi}{2}$.

Uitwerking: Integreren:

$$\int_p^{\pi-p} 2 \sin x \, dx = [-2 \cos x]_p^{\pi-p} = -\cos(\pi - p) - (-2 \cos p) = 4 \cos p$$

Opmerkingen: Eenvoudig

- 9 Nu p zó dat de lijn op hoogte $2 \sin p$ het oppervlak uit de vorige opgave in twee gelijke stukken deelt.

Uitwerking: Het onderste stuk, W , heeft oppervlakte $(\pi - 2p) \cdot 2 \sin p$. Dat moet gelijk zijn aan $2 \cos p$ (helft van het vorige antwoord). Dus moet gelden

$$2(\pi - 2p) \sin p = 2 \cos p \quad \text{of} \quad \pi - 2p = \cotan p$$

Maple geeft $p = 0,4052351416$

Opmerkingen: Niet moeilijk; wel veel tekst en beeld voor deze twee eenvoudige sommen.

- 10 Gegeven $f(x) = (e^{2x} - 1000)/(e^x - 10)$. Het snijpunt van beide asymptoten is B ; te bewijzen dat dit midden ligt tussen A (snijpunt horizontale asymptoot en y -as) en C (snijpunt horizontale asymptoot en grafiek van f).

Uitwerking: Horizontale asymptoot: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (0 - 1000)/(0 - 10) = 100$. Verticale asymptoot: $e^x = 10$, of $x = \ln 10$. Dus $A = (0, 100)$ en $B = (\ln 10, 100)$; als we nu $f(2 \ln 10)$ uitrekenen krijgen $(10000 - 1000)/(100 - 10) = 100$, dus $(2 \ln 10, 100)$ ligt ook op de grafiek, dat is kennelijk C .

Opmerkingen: Je kunt C ook vinden door $f(x) = 100$ op te lossen. Niet moeilijk, vind ik.

- 11 Na een lange inhoud over wind aan zee moeten mogelijk windrichtten worden bepaald uit de gegevens dat één luchtstroom w_z met 4 m/s loodrecht op de kust landinwaarts gaat en een andere, w_d , met 6 m/s zó dat de resulterende wind, w_t , evenwijdig aan de kust waait.

Uitwerking: Er geldt dus dat $w_t = w_z + w_d$ loodrecht staat op w_z . Teken de cirkel om het eindpunt van de vector w_z met straal 6. De vectoren vanaf dat eindpunt naar de snijpunten zijn, na verplaatsing naar de oorsprong de twee mogelijke vectoren w_d .

Opmerkingen: Wel veel leeswerk om een eenvoudige optel/aftreksom te kunnen maken.

- 12 Dezelfde situatie met wat andere gegevens: de kustlijn maakt een hoek van 30° met de meridiaan (die hier als y -as dient); w_d wijst naar het zuid-westen (hoek van 45° met de negatieve y -as) met grootte 5 m/s; de vector w_z staat weer loodrecht op de kust, wijst landinwaarts en heeft grootte 3 m/s. We moeten de resulterende windsnelheid in m/s bepalen.

Uitwerking: In coördinaten: $w_d = (-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2})$ en $w_z = (\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$, met de resultante is $w_t = (-\frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2})$. De lengte van de vector is $\frac{1}{2}\sqrt{136 - 30\sqrt{6} + 30\sqrt{2}} \approx 5,122053165$.

Opmerkingen: Niet moeilijk. Maar dit had ook zonder dat hele verhaal gevraagd kunnen worden.

- 13 Twee functies: $f(x) = \log \sqrt{x}$ en $g(x) = \log(x\sqrt{x}) - 1$. De lijn $y = q$ snijdt beide grafieken in respectievelijk A en B . Bepaal q zó dat A links van B ligt, met onderlinge afstand 3.

Uitwerking: $A = (x, \frac{1}{2} \log x)$ en $B = (y, \frac{3}{2} \log y - 1)$. We willen $y - x = 3$ en $\frac{1}{2} \log x = q$ en $\frac{3}{2} \log y = q + 1$. Dat kan op een paar manieren uitgewerkt worden; bijvoorbeeld met $x = 10^{2q}$ en $y = 10^{\frac{2}{3}(q+1)}$ en dus $10^{\frac{2}{3}(q+1)} - 10^{2q} = 3$. Als je $t = e^{\frac{2}{3}q}$ stelt krijg je een derdegraadsvergelijking: $10^{\frac{2}{3}}t - t^3 = 3$. Maple lost die, en zelfs de oorspronkelijke vergelijking, zo op: $q \approx 0,3435336295$.

Opmerkingen: Dit vergt enige zorg bij de keus van de vergelijking; die exponenten, $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$, moeten wel uit de logaritmen, anders wordt het een zootje.

- 14 Is het mogelijk dat de driehoek ABP gelijkbenig is en bij P een rechte hoek heeft?

Uitwerking: Als een rechthoekige driehoek gelijkbenig is dat zijn de rechthoekszijden de gelijke benen. We kunnen dus kijken waar $AP \perp BP$ of waar AP en BP even lang zijn.

De laatste mogelijkheid gaat als volgt: de middelloodlijn van A en B heeft vergelijking $4x - y = 75$. Snijden met m geeft $4(18 + 5t) - (30 - 3t) = 75$ of $t = \frac{33}{23}$. Dat geeft $P = \frac{1}{23}(579, 591)$. Het inwendig product van $P - A$ en $P - B$ is gelijk aan $\frac{15912}{529}$ en dat is in ieder geval ongelijk aan 0. Dus als de benen AP en BP gelijk zijn is de hoek bij P niet recht.

De eerste mogelijkheid neem het inwendig product van $P - A$ en $P - B$ en kijkt wanneer dat gelijk is aan 0. Dat geeft $34t^2 - 170t + 204 = 0$, met oplossingen $t = 3$ en $t = 2$ en punten $P_3 = (33, 21)$ en $P_2 = (28, 24)$. De afstanden tot A en B zijn in beide gevallen niet gelijk: $11\sqrt{10}$ versus $7\sqrt{10}$ dan wel $14\sqrt{5}$ versus $12\sqrt{5}$.

Hoe dan ook: er is niet zo'n punt P .

Opmerkingen: Aardige analytische meetkunde.

- 15** Na een heel verhaal over het wentellichaam van \sqrt{x} om de x -as moet aangetoond worden dat, bij gegeven (positieve) a and b met $a < b$. De inhoud van het lichaam tussen $x = a$ en $x = b$ gelijk is aan $h \cdot A$, waar $h = b - a$ en waar A de oppervlakte is van de plak van het lichaam bij $x = \frac{1}{2}(a + b)$.

Uitwerking: De inhoud is gelijk aan

$$\pi \int_a^b (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_a^b x dx = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$$

De oppervlakte A is, via πr^2 , gelijk aan $\pi \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)}\right)^2 = \frac{\pi}{2}(a+b)$, en dus $h \cdot A = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$ als gevraagd.

Opmerkingen: Eigenlijk heel flauw, als je de wentelformule kent natuurlijk, maar ik vond het hele verhaal om deze som heen wel wat overdreven. Zo werd $\frac{1}{2}(a+b)$ onderweg nog m genoemd: onderdeel van het leeswerk was nog dat we uit ' $(m, 0)$ ligt midden tussen $(a, 0)$ en $(b, 0)$ ' moesten halen dat $m = \frac{1}{2}(a+b)$ en verder werd h indirect beschreven als de hoogte van het lichaam nadat het een kwartslag gekanteld was.