EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2021-05-17

1 De lijn l is de raaklijn in $(0,0)$ aan de grafiek van $y = x - x^2$. De lijn m is de lijn loodrecht op l door de top $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ van de grafiek van $y = x - x^2$. Het gebied V is het vlakdeel ingesloten door de lijn m en de grafiek van $y = x - x^2$. Te bepalen: de oppervlakte van V.
Uitwerking: De vergelijking van l is $y = x$ (differentiëren en $x = 0$ invullen). Dus de vergelijking van m is $y - \frac{1}{4} = -(x - \frac{1}{2})$ of $y = -x + \frac{3}{4}$. (de richtingscoëfficiënt is immers gelijk aan -1). De snijpunten van m en $y = x - x^2$ bepalen: $-x + \frac{3}{4} = x - x^2$ oplossen. Dat wordt $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ of $(x-1)^2 - \frac{1}{4} = 0$, met oplossingen $x = \frac{1}{2}$ (voor de top) en $x = \frac{3}{2}$ (het andere snijpunt). De oppervlakte is dan gelijk aan

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x - x^2 - \left(-x + \frac{3}{4}\right) \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$$

Opmerkingen: Onverwacht stapelwerk: minder voorgekauwd dan andere sommen.

2 Gegegeven f en g op $[0, 2\pi]$ door $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ en $g(x) = \sin 2x$. Ook wordt gegeven dat de grafieken van f en g vijf punten gemeen hebben: drie op de x-as en twee anders P en Q (op een plaatje zijn P en Q aangegeven: P heeft de kleinste x-coördinaat). Te bepalen: de x-coördinaten van P en Q.
Uitwerking: De vergelijking $2\sin x - \sin 2x = \sin 2x$ oplossen; die wordt dus $2\sin x - 2\sin 2x = 0$ of $2\sin x - 4\sin x \cdot \cos x = 0$ en daarmee $2\sin x(1 - 2\cos x) = 0$. Dus: $\sin x = 0$ — met oplossingen $x = 0$, π, en 2π — of $2\cos x = 1$ — met oplossingen $x = \frac{\pi}{3}$ en $\frac{7}{3}\pi$. Omdat $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$ zijn de gevraagde x-coördinaten dus $\frac{\pi}{3}$ (voor P) en $\frac{5}{3}\pi$ (voor Q).
Opmerkingen: Niet bijzonder moeilijk, in vergelijking met som 1 wel meer meegegeven.

3 De grafiek van g gaat 1 omhoog en wordt zo de grafiek van h (gegeven door $h(x) = 1 + \sin 2x$ natuurlijk). Te bepalen de oppervlakte van het gebied V ingesloten door de grafieken van h en f. In een plaatje wordt duidelijk gemaakt dat V onder f en boven h ligt en links van π. Verder zijn de x-coördinaten van de snijpunten afgerond gegeven: 1,33 en 2,97.
Uitwerking: De snijpunten hebben inderdaad geen makkelijke x-coördinaten. Maar het moet toch met behulp van primitieven:

$$\int_{1{,}33}^{2{,}97} 2\sin x - 2\sin 2x - 1 \,\mathrm{d}x = [-2\cos x + \cos 2x - x]_{1{,}33}^{2{,}97} = 2{,}635526213$$

Dat laatste met dank aan Maple; afgerond volgens de eisen is dat 2,6.
Opmerkingen: Wel veel verhaal voor wat in essentie neerkomt op "primitiveer $2\sin x - 2\sin 2x - 1$".

4 De functie k gegeven door $k(x) = \frac{1}{2}\tan x$ komt erbij. Die wordt met f in één plaatje getekend en daarbij wordt ons verteld dat de grafieken van f en k elkaar raken bij $x = \frac{1}{3}\pi$. Dat moet bewezen worden.
Uitwerking: We hebben $f(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $k(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus er is een snijpunt. Daarnaast $f'(\frac{1}{2}\pi) = 2$ en $k'(\frac{1}{3}\pi) = 2$, de raaklijnen zijn gelijk en er is sprake van raking.
Opmerkingen: Flauw: niet meer dan invullen; ik had het spannender gevonden als de raakpunten ook bepaald hadden moeten worden.

5 Een lang verhaal over aardbevingen leidt tot de vraag naar een afstand d als twee golven die met snelheden van respectievelijk 6 km/s en 3,5 km/s die met een tijdsverschil van 17 seconden overbruggen.
Uitwerking: De tijden die de golven nodig hadden waren dus $d/6$ en $d/3{,}5$ seconden. Dat aftrekken en gelijkstellen aan 17: $d(1/3{,}5 - 1/6) = 17$ oplossen. Dat geeft $d = 714/5$ km.
Opmerkingen: Meer een opsteloefening dan wat anders.

6 Weer een lang verhaal dat uitmondt in de vraag: bepaal de punten die op afstand 240 km van de oorsprong liggen en op afstand 80 km van het punt $(192, 128)$.
Uitwerking: Dus oplossen $x^2 + y^2 = 240^2$ en $(x-192)^2 + (y-128)^2 = 80^2$. Invullen van de eerste in de tweede vergelijking leidt tot $-384x - 256y + 104448 = 0$, dit kun je door -128 delen: $3x + 2y - 816 = 0$. Die lijn met de eerste cirkel snijden geeft $x^2 + (-\frac{3}{2}x + 408)^2 = 240^2$, of $\frac{13}{4}x^2 - 1224x + 108864 = 0$, of $13x^2 - 4896x + 435456 = 0$. Geschikt rekentuig maakt hier korte metten mee: $x = 144$ (met $y = 192$) of

$x = \frac{3024}{13}$ (met $y = \frac{768}{13}$). Het antwoord moest in gehele getallen, dus het tweede punt ronden we af tot $(233, 59)$.
Opmerkingen: In principe niet moeilijk, maar de relatief grote getallen kunnen tot rekenfouten aanleiding geven.

7 Weer een lang verhaal dat leidt tot een vergelijking $N = 10^{a-bM}$, waarbij a en b parameters zijn. Hiermee controleren of twee paren $(M_1, N_1) = (6, 285{,}5)$ en $(M_2, N_2) = (7{,}5, 4{,}5)$, afgeleid uit een tabel, een derde afgeleid paar goed voorspellen.
Uitwerking: De opgave geeft aan dat a en b uit de twee paren berekend kunnen worden. Dat klopt: het eerste paar geen $285{,}5 = 10^{a-6b}$ en het tweede geeft $4{,}5 = 10^{a-7{,}5b}$. Logartitmen nemen: $a-6b = \log 285{,}5$ en $a - 7{,}5b = \log 4{,}5$. Aftrekken: $1{,}5b = \log 285{,}5 - \log 4{,}5$; het rekenapparaat geeft $b \approx 1{,}2016$. Invullen in een van de vergelijkingen geeft $a \approx 9{,}6652$.
Nu kijken wat $M = 6{,}5$ oplevert: $N = 10^{a-6{,}5b} = 71{,}58$. De waarde van N die we uit de tabel halen is 75,5; dat scheelt afgerond dus 4. (Antwoord moest geheel.)
Opmerkingen: Wel weer een heel stuk leeswerk (bijna een pagina) voor wat, met een goede rekenmachine, eigenlijk niet veel moeite is.

8 We hebben het eenheidsvierkant met hoekpunten O, A, B en C (linksom). Verder voor een $p \in (0, 1)$ de punten $P = (p, 0)$ en $Q = (p^{-1}, 0)$. In een plaatje zijn $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA}$, en $\overrightarrow{CQ}$ getekend. Te bewijzen: voor elke p geldt $\angle PCA = \angle ACQ$.
Uitwerking: Er geldt $\tan\angle OCP = p$ en $\tan\angle OCQ = \frac{1}{p}$, dus de som van de hoeken is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$ (we werken op het interval $(0, \frac{\pi}{2})$ en gebruiken dat $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = (\tan x)^{-1}$). Het gemiddelde van die hoeken is dus $\frac{\pi}{4}$, en dat is nu net $\angle OCA$. Dus CA is de bissectrice van $\angle PCQ$ en dat betekent dat $\angle PCA = \angle ACQ = \frac{1}{2}\angle PCQ$.
Opmerkingen: Het correctievoorschrift laat nog meer wegen zien die naar Rome leiden (deze oplossing staat er niet bij). Sommigen vergen nogal veel werk; lijkt me lastig nakijken.

9 Het midden van PB noemen we M. Gevraagd voor welke p de vector $\overrightarrow{QM}$ loodrecht staat op PB.
Uitwerking: De coördinaten van M zijn $(\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2})$. We vinden

$$\overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} - \frac{1+p}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het inwendig product van de vectoren is gelijk aan $(p^3 - 4p + 2)/(2p)$ en moet gelijk zijn aan 0. Dus $p^3 - 4p + 2 = 0$ oplossen. De formules van Cardano leiden tot complexe getallen. Numeriek dan maar: Maple levert 0,5391888728, volgens de wensen afgerond geeft dat dan $p \approx 0{,}54$.
Opmerkingen: Wel leuk: een derdegraadsvergelijking uit zo'n schijnbaar eenvoudig probleem; maar opletten met de tekens en de breuken.

10 Een kromme wordt beschreven door $x(t) = t^2$ en $y(t) = t^2 - 2t$. Als $a > 0$ dat snijdt de lijn $x = a$ de kromme in twee punten: R (onder) en S (boven). Verder hebben we $Q = (a, 0)$ op de x-as. De verhouding $\frac{QR}{QS}$ heeft een limiet voor $a \to \infty$. Bepaal die limiet.
Uitwerking: Bij $x = a$ horen twee tijdstippen: $t_1 = \sqrt{a}$ en $t_2 = -\sqrt{a}$. Daaruit lezen we af dat $R = (a, a - 2\sqrt{a})$ en $S = (a, a + 2\sqrt{a})$. De verhouding $\frac{QR}{QS}$ is dus gelijk aan $\frac{a-2\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}}$.

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a - 2\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a}} = \lim_{a\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Opmerkingen: Wel aardig.

11 Gegeven een familie functies: $f_p(x) = \frac{x^3+4p}{x^2}$, voor $p > 0$. Te bewijzen: de grafiek van f_1 ligt boven zijn scheve asymptoot.
Uitwerking: Het bestaan van die asymptoot is gegeven, maar je ziet hem zo: uit $f_1(x) = x + \frac{4}{x^2}$ volgt meteen dat $\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, dus $y = x$ is de scheve asymptoot. En ook is meteen duidelijk dat $f_1(x) - x$ positief is: het is een kwadraat.
Opmerkingen: Ik weet niet of het gegeven van het bestaan van de asymptoot hierbij helpt.

12 Gegeven: elke f_p heeft één top; toon aan dat die toppen op één lijn liggen.
Uitwerking: Differentiëren dan maar, wel eerst de breuk als boven omschrijven tot $x + \frac{4p}{x^2}$ want dan volgt sneller dat $f_p'(x) = 1 - \frac{8p}{x^3}$. Het enige nulpunt van f_p' is de oplossing van $x^3 = 8p$, dus $x = 2\sqrt[3]{p}$. (Ook al is het gegeven: als $0 < x < 2\sqrt[3]{p}$ dan $f_p'(x) < 0$ en $f_p'(x) > 0$ als $x > 2\sqrt[3]{p}$, dus bij $2\sqrt[3]{p}$ zit een lokaal minumum.) De functiewaarde is daar $y = 3\sqrt[3]{p}$ dus elke top ligt op de lijn $y = \frac{3}{2}x$.
Opmerkingen: Gelukkig werden de andere p-en toch nog gebruikt. Wel weer flauw dat het bestaan van de toppen al was gegeven.

13 Neem een horizontale lijn op hoogte $q > 0$ en snijd deze met de grafiek van $y = |\ln x|$; de snijpunten heten B en C, met B links van C. Verder is A het punt $(0, q)$ op de y-as. Voor welke q is de lengte van BC drie maal zo groot als die van AB?
Uitwerking: De x-coördinaat van B is e^{-q} en $C = (e^q, q)$. We krijgen dus de vergelijking $e^q - e^{-q} = 3e^q$ op te lossen. Dat wordt $e^{2q} = 4$, dus $2q = \ln 4$, of $q = \ln 2$.
Alternatief: voor de x-coördinaten van B en C geldt $x_B = x_C^{-1}$ en dit leidt tot de vergelijking $x_C = 4x_C^{-1}$, of $x_C^2 = 4$, dus $x_C = 2$ en daarmee $q = \ln 2$.
Opmerkingen: Wel aardig.

14 Er zijn twee punten gegeven: P op de grafiek van $y = 6\sqrt{x}$ en P' op de negatieve x-as. Voor de punten geldt: hun afstanden tot de oorsprong, O, zijn gelijk, en de hoek $\angle POP'$ is gelijk aan $120°$. Gevraagd de x-coördinaat van P'.
Uitwerking: De hoek tussen de positieve x-as en OP is dus $60°$, en de tangens daarvan is gelijk aan $\sqrt{3}$. Dus: als $P = (x, 6\sqrt{x})$ dan geldt $6\sqrt{x} = x\sqrt{3}$, met oplossingen $\sqrt{x} = 0$ of $\sqrt{x} = 6/\sqrt{=}2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. Dus: $P = (12, 12\sqrt{3})$ en dan $|OP| = 12\sqrt{1+3} = 24$. We vinden $P' = (-24, 0)$.
Opmerkingen: Ik vond de inleiding wel wat ingewikkeld. “Bepaal het punt P op de grafiek van $y = 6\sqrt{x}$ zó dat de hoek tussen de positieve x-as en OP gelijk is aan $60°$ en zijn afstand tot de oorsprong” vraagt uiteindelijk hetzelfde.