EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2021-06-18

1 De kromme K is gegeven door $x(t) = \cos^3 t$ en $y(t) = \sin^3 t$, met $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$ Aan te tonen: de helling van de raaklijn in $(x(t), y(t))$ is gegeven door $-\frac{\sin t}{\cos t}$.
Uitwerking: De raakvector is $(x'(t), y'(t))$ en de helling is dan $y'(t)/x'(t)$. We krijgen dus

$$\frac{3\sin^2 t\,\cos t}{-3\cos^2 t\,\sin t} = \frac{3\sin t\,\sin t\,\cos t}{-3\cos t\,\cos t\,\sin t} = \frac{\sin t}{-\cos t}$$

als gevraagd.
Opmerkingen: Niet moeilijk zou ik denken, alleen: waarom niet $-\tan t$?

2 Aan te tonen: de raaklijn in $(x(t), y(t))$ wordt gegeven door

$$y = -\frac{\sin t}{\cos t} \cdot x + \sin t$$

Uitwerking: De raaklijn wordt in het algemeen gegeven door

$$y - \sin^3 t = -\frac{\sin t}{\cos t}(x - \cos^3 t)$$

als we $\sin^3 t$ naar rechts brengen en $\cos^3 t$ buiten de haakjes dan houden we als 'constante term' over:

$$\sin^3 t + \frac{\sin t}{\cos t}\cos^3 t = \sin t(\sin^2 t + \cos^2 t) = \sin t$$

Opmerkingen: Ook niet moeilijk.

3 De raaklijn snijdt de x-as in A en de y-as in B. Aan te tonen: de lengte van AB is constant.
Uitwerking: Door $x = 0$ in te vullen krijgen we $B = (0, \sin t)$, en $y = 0$ invullen geeft $A = (\cos t, 0)$. De afstand tussen die twee is $\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$.
Opmerkingen: Nog steeds niet moeilijk.

4 De vector $\overline{OF}$, met $F = (7, 2)$ wordt gespiegeld in de x-as, met spiegelbeeld $\overline{OG}$. Bepaal p en q zó dat $p \cdot \overline{OF} + q \cdot \overline{OG} = \binom{7}{-3}$.
Uitwerking: Er staat dus

$$p\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$$

Dat geeft $p+q = 1$ en $2p-2q = -3$ (of $p-q = -\frac{3}{2}$). Vergelijkingen optellen geeft $2p = -\frac{1}{2}$, dus $p = -\frac{1}{4}$, en dan $q = 1 - p = \frac{5}{4}$. (Of vergelijkingen aftrekken: $2q = \frac{5}{2}$ en $q = \frac{5}{4}$.)
Opmerkingen: Dit werd wel allemaal wel heel voorzichtig opgezet met een lange uitleg over spiegelen. Het uiteindelijk werk was niet zo veel.

5 Nu wordt $\overline{OF}$ gespiegeld in de lijn door O met richtingsvector $\binom{3}{4}$. Ligt het spiegelbeeld links of rechts van de y-as?
Uitwerking: Projecteer F loodrecht op de lijn met behulp van het inwendig product: $S = \frac{29}{25}(3, 4)$ ligt midden tussen F en zijn spiegelpunt F'; de x-coördinaat van F' is dan $7 - 2(7 - \frac{87}{25}) = \frac{174}{25} - \frac{175}{25} = -\frac{1}{25}$.
Opmerkingen: Wel aardig, en er zijn vele wegen in het correctievoorschrift die naar Rome leiden.

6 Gegeven een familie functies: $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + px$. Een bijbehorende lijn k met vergelijking $y = px$. Verder is l de raaklijn aan de grafiek van f_p in $A = (2, f(2))$. Ook is gegeven dat elke versie van l de y-as snijdt in $B = (0, 4)$. Ten slotte is M het snijpunt van de lijnen k en l. Te bewijzen M is het midden van AB.
Uitwerking: Er is zoveel weggegeven dat de weg van de minste weerstand is te laten zien dan het midden van AB op k ligt: met $A = (2, -4+2p)$ volgt dat dat midden gelijk is aan $\frac{1}{2}(0, 4) + \frac{1}{2}(2, -4+2p) = (1, p)$ en dat punt ligt op k.
Opmerkingen: Dit was de derde oplossing in het correctievoorschrift. De anderen waren iets meer werk: vergelijkingen opstellen en oplossen. Niet moeilijk omdat er (te) veel was weggegeven.

7 Bepaal de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door k en de grafiek van f_p.
Uitwerking: Er was gegeven dat k de raaklijn aan f_p in de oorsprong is en een bijgaand plaatje laat zien dat k boven de grafiek van f_p ligt. Het rechtersnijpunt vinden we door $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + px = px$ op te lossen; de parameter p verdwijnt en we krijgen $\frac{1}{4}x^3(x-4) = 0$. We moeten dus $\int_0^4 px - f_p(x)\,\mathrm{d}x$ bepalen, en dat is

$$\int_0^4 x^3 - \frac{1}{4}x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^4 = \frac{64}{5}$$

Opmerkingen: Een beetje flauw om p zo weg te werken.

8 De verdubbelingstijd T van een bankrekening met rentepercentage p is gelijk aan

$$\frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{p}{100})}$$

Uitwerking: De grootte van het kapitaal op tijdstip t is gelijk aan $B(1+\frac{p}{100})^t$, met B het beginkapitaal. De vergelijking $B(1+\frac{p}{100})^t = 2B$ oplossen, met behulp van logaritmen via $t\ln(1+\frac{p}{100}) = 2$, geeft het antwoord.
Opmerkingen: Niet moeilijk

9 De raaklijn k aan de grafiek van $N(x) = \ln(1+\frac{x}{100})$ in de oorsprong wordt gegeven: $y = \frac{1}{100}x$. De raaklijn ligt boven de grafiek van N, getoond in een plaatje. Te bewijzen dat de verticale afstand tussen k en de grafiek stijgt als functie van x.
Uitwerking: Het verschil is gelijk aan $\frac{1}{100}x = \ln(1+\frac{x}{100})$; de afgeleide hiervan is $\frac{1}{100} - \frac{1}{100}\frac{1}{1+\frac{x}{100}} = \frac{1}{100}(1 - \frac{1}{1+\frac{x}{100}})$. Omdat $1+\frac{x}{100} > 1$ volgt dat $1 > \frac{1}{1+\frac{x}{100}}$; dus de afgeleide is positief en het verschil stijgt.
Opmerkingen: Rechtstreeks.

10 Een lang verhaal over twee ‘bankenformules’ voor T, te weten de benaderingen $T_1 = \frac{70}{p}$ (voor kleinere p) en $T_2 = \frac{72}{p}$ (voor grotere p) leidt tot de vraag bij welk rentepercentage benadering T_2 beter wordt dan T_1.
Uitwerking: Dit vraagt ons te bepalen voor welke p de absolute waarden van de verschillen $T_2 - T$ en $T_1 - T$ gelijk zijn. Numeriek oplossen: $p \approx 4{,}90$.
Opmerkingen: Een paginalang verhaal om versluierd te vragen $|T_2 - T| = |T_1 - T|$ op te lossen is wel veel. Het enige probleem zouden de tekens kunnen zijn, er geldt $T_1 < T < T_2$.

11 Gegeven $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{2x}$. Het punt $P = (p, 2\sqrt{p})$ ligt op de grafiek van f. Het punt Q is het snijpunt van de grafiek van g en het lijnstuk OP. Te bewijzen: de hellingen van de raaklijnen in P en Q aan de grafieken van f en g zijn gelijk (onafhankelijk van p).
Uitwerking: Eerst Q bepalen: $(q, \sqrt{2q})$ is een veelvoud van $(p, 2\sqrt{p})$. Dat geeft de vergelijking $\sqrt{2q}/q = 2\sqrt{p}/p$, of $\sqrt{2/q} = 2/\sqrt{p}$, en dus $q = \frac{1}{2}p$. Verder geldt $f'(p) = p^{-\frac{1}{2}}$ en $g'(q) = (2q)^{-\frac{1}{2}}$. Maar $p = 2q$, dus de afgeleiden zijn gelijk.
Opmerkingen: Niet moeilijk, wel twee stappen: q vinden en dan differentiëren.

12 Neem $p = 4$, dus $P = (4, 4)$. Verder ligt R op de grafiek van g, recht onder P. De raaklijnen aan f en g in P en R snijden elkaar in $S = (-4, 0)$. Gevraagd: de verhouding tussen de oppervlakte van het gebied ingesloten door PR en de grafieken van f en g enerzijds en de oppervlakte van de driehoek PRS anderzijds.
Uitwerking: Er geldt $R = (4, 2\sqrt{2})$, dus de basis van de driehoek PQR is $4 - 2\sqrt{2}$. De hoogte is gelijk aan 8; de oppervlakte is gelijk aan $16 - 8\sqrt{2} = 8(2 - \sqrt{2})$.
De andere oppervlakte is gelijk aan $\int_0^4 2\sqrt{x} - \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x = (2-\sqrt{2})\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = (2-\sqrt{2})[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{16}{3}(2-\sqrt{2})$.
De verhouding is dus gelijk aan 2/3.
Opmerkingen: Eigenlijk twee vragen in één.

13 Over de functie $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Gevraagd de vergelijkingen van de asymptoten van de inverse functie van f.
Uitwerking: Er geldt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to 0}\mathrm{e}^{-u} = 1$, dus $y = 1$ is een horizontale asymptoot van de grafiek van f, en dus is $x = 1$ een verticale asymptoot van de inverse functe.
Verder $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \infty$, dus de positieve y-as is een verticale asymptoot voor f, en daarmee is de positieve x-as een horizontale asymptoot voor de inverse functie.
Opmerkingen: De inverse opstellen kan ook: $-1/\ln x$. Het rekenwerk is niet moeilijk.

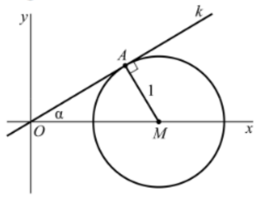
14 Voor elk punt P op de grafiek van f rechts van de y-as bepalen we de x-coördinaat van het snijpunt S van de raaklijn in P en de x-as. Voor welke P is die x-coördinaat maximaal?
Uitwerking: Er geldt $P = (p, \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}$, en $f'(p) = \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}$ (gegeven). De raaklijn heeft dus vergelijking

$$y - \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}(x-p)$$

Stel $y = 0$ en deel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}$ weg; er komt $-p^2 = x - p$, of $x = p - p^2$. Met kwadraat afsplitsen: $x = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2$ laat zien dat x maximaal $\frac{1}{4}$ is als $p = \frac{1}{2}$, en dus $P = (\frac{1}{2}, \mathrm{e}^{-2})$.
Opmerkingen: Niet echt moeilijk, wel twee stappen: snijpunt bepalen en maximum bepalen. Het correctievoorschrift gaf een oplossing via een buigpunt van de grafiek van f. Dat inzicht had ik niet toen ik begon.

15 Gegeven een lijn k door O die een hoek α met de x-as maakt ($0 < \alpha < 90°$). Het punt M ligt op de x-as en op afstand 1 van k; de cirkel in de figuur heeft dus straal 1. Het punt $A = (x_A, y_A)$ is het raakpunt.

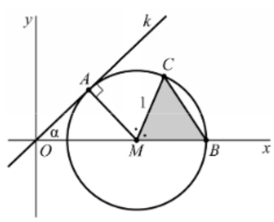
figuur 1



Gevraagd: voor welke α geldt $x_A = \frac{1}{2}$; in hele graden.
Uitwerking: Trek de lijn van A naar $A' = (x_A, 0)$. Met behulp hiervan volgt $\cos\alpha = \cos\angle MAA' = y_A = x_A \cdot \tan\alpha$. We vinden de vergelijking $\cos\alpha = \frac{1}{2}\tan\alpha$. Deze oplossen geeft 0,8959 radialen, en dat is ongeveer 51°.
Opmerkingen: Eindelijk een beetje gonio.

16 Neem C op de cirkel zó dat MC de bissectrice van $\angle BMA$ is.

figuur 2



Bepaal de limiet van de oppervlakte van driehoek MBC als α tot 0 nadert.
Uitwerking: Als α tot 0 nadert dan nadert $\angle OMA$ tot 90° en dus $\angle BMC$ tot 45°. De oppervlakte van de limiet-driehoek is dan $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.
Opmerkingen: Wel leuk.