EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2021-07-07

1 Gegeven een driehoek ABC, met $AB = 4$ en $BC = 12$, voor het midden M van BC geldt $AM = 5$. Gevraagd BC.
Uitwerking: De cosinusregel voor hoek β in B geeft in ABM

$$25 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos\beta$$

en dus $\cos\beta = \frac{27}{48}$.
Nogmaals, nu in ABC, geeft

$$AC^2 = 16 + 144 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cos\beta$$

en na uitwerken $AC^2 = 106$. En dus $AC = \sqrt{106} = 10\sqrt{1{,}06} \approx 10 \cdot 1{,}03 = 10{,}3$.
Opmerkingen: Wel een aardige goniosom.

2 Gegeven zijn $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x)$ en $g(x) = 2 + \sin x$ op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$. Aan te tonen dat $f'(x)$ gelijk is aan $6\cos^3 x - 5\cos x$
Uitwerking: In eerste instantie $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot \sin(2x)$. Met behulp van de formules voor $\cos 2x$ en $\sin 2x$ maak je daar snel de gewenste uitkomst van.
Opmerkingen: Niet echt moeilijk, maar wel makkelijk om bij de volgende som te hebben.

3 Bepaal hoevaak de raaklijnen aan de grafieken van f en g, voor punten met dezelfde x-coördineet, loodrecht op elkaar staan.
Uitwerking: Dat komt dus neer op het tellen van het aantal oplossingen van $f'(x) \cdot g'(x) = -1$. Met behulp van de vorige som krijgen we

$$(6\cos^3 x - 5\cos x) \cdot \cos x = -1$$

En dat wordt $6\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1 = 0$, ofwel $(3\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x - 1) = 0$. Omdat $\cos^2$ op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ twee golfjes maakt hebben $3\cos^2 x - 1 = 0$ en $2\cos^2 x - 1 = 0$ elk vier oplossingen. In totaal dus acht oplossingen.
Opmerkingen: Een aardige vraag.

4 Laat zien dat $f(x)$ gelijk is aan $\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x$.
Uitwerking: Terugrekenen via $\sin 3x = \sin(2x+x)$ en $\sin x = \sin(2x-x)$ is het makkelijkst; De formules staan gegeven op het examenpapier.
Opmerkingen: Eigenlijk flauw, maar duidelijk ingevoegd wegens de volgende som.

5 De grafieken van f en g zijn meegegeven en daar is te zien dat deze elkaar bij $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3}{2}\pi$ snijden en dat verder $f(x) < g(x)$. Gevraagd de oppervlakte van het ingesloten vlakdeel.
Uitwerking: Integreren:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 2 + \sin x - \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x \, \mathrm{d}x = \left[2x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{6}\cos 3x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 4\pi$$

Opmerkingen: Door de keuze van de eindpunten en de vorige som niet moeilijk meer. Ik zou misschien $\sin(x) \cdot \cos(2x)$ omgeschreven hebben tot $(2\cos^2 x - 1)\sin x$ en een substitutie hebben uitgevoerd.

6 Een verhaal over capaciteiten van rivieren en herhalingstijden van overstromingen leidt tot

$$C = a - b \cdot \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)$$

Hierbij $T > 1$, $a, b > 0$. Gegeven $a = 5734$, $b = 1648$, en $C = 12000$. Gevraagd T.
Uitwerking: Invullen leidt tot

$$\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right) = -\frac{6266}{1648}$$

En dus $\frac{T}{T-1} = \exp(\exp(-\frac{6266}{1648})) \approx 1.022572956$; dan geldt $T = 1.022572956/0.022572956 \approx 45.30079959$.
Afgerond op gehelen krijgen we $T = 45$ (of 46 afhankelijk van hoe je 'herhalingstijd opvat).

Opmerkingen: Een beetje een gedoe, maar niet moeilijk. Ik heb dit met Maple gedaan, met veel cijfers achter de komma). Het CV is wat misleidend: de berekeningen onderweg gaan tot drie cijfers met aan het eind $T \approx 1.022\ldots/0.022\ldots \approx 45{,}3\ldots$; maar $1.022/0.022 \approx 46.45$ en dat scheelt toch een jaar.

7 De afgeleide van C naar T wordt gegeven, met de opdracht de juistheid aan te tonen.
Uitwerking: Hier is het makkelijk even $C = a - b \cdot \ln(\ln T - \ln(T-1))$ te schrijven, dan komt er

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{-b}{\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T-1}\right) = \frac{b}{\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right) \cdot T \cdot (T-1)}$$

Opmerkingen: Niet moeilijk, wel netjes werken.

8 Laat zien dat C stijgend is als functie van T.
Uitwerking: De afgeleide is positief want: $b > 0$, $T > 1$, en $\frac{T}{T-1} > 1$ dus $\ln(\frac{T}{T-1}) > 0$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, gegeven de formule.

9 Gegeven $C = 1700$ bij $T = 4$ en $C = 2100$ bij $T = 10$. Welke C hoort bij $T = 100$?
Uitwerking: Stap 1: a en b bepalen. We krijgen twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 1700 &= a - b\ln(\ln(4/3)) \\ 2100 &= a - b\ln(\ln(10/9)) \end{aligned}$$

Aftrekken en omschrijven geeft $b = 400/(\ln(\ln(4/3)) - \ln(\ln(10/9))) \approx 398.2207485$. En dan $a \approx 1203.857038$.
Stap 2: $T = 100$ invullen: $C = a - b \cdot \ln(\ln(100/99)) \approx 3035.731910$. Het moest geheel: $C \approx 3036$ (in de context is naar boven afronden ook beter).
Opmerkingen: Niet moeilijk wel opletten bij invullen in rekenmachientje denk ik.

10 Twee halve cirkels zijn gegeven: C_1 door een vergelijking: $x^2 + y^2 + 12x = -32$ en $y \geqslant 0$; en C_2 door middelpunt $M_2 = (5, 0)$ en straal $r = 5$, en ook $y \geqslant 0$. Bepaal P op de y-as zó dat de afstand van P tot C_1 gelijk is aan tweemaal de afstand van P tot C_2.
Uitwerking: De vergelijking van cirkel C_1 is om te schrijven tot $(x + 6)^2 + y^2 = 4$, dus $M_1 = (-6, 0)$ en de straal is 2. Er geldt $d(P, C_1) = PM_1 - 2$, en $d(P, C_2) = PM_2 - 5$. Invullen leidt tot

$$\sqrt{y^2 + 36} - 2 = 2\left(\sqrt{y^2 + 25} - 5\right)$$

Numeriek oplossen: $y \approx 7.017149229$, twee decimalen: $y \approx 7.02$.
Opmerkingen: Ik heb Maple het werk laten doen. Met een beetje werk kan het exact: $\frac{4}{3}\sqrt{8 + 2\sqrt{97}}$.

11 Gegeven twee punten P_1 en P_2 met bewegingsvergelijkingen respectievelijk $\boldsymbol{x}_1(t) = (t^2 + 2t, 4t)$ en $\boldsymbol{x}_2(t) = (4t, 2t^2)$. De snelheid $v_2(t)$ van P_2 is gegeven: $v_2(t) = 4\sqrt{t^2 + 1}$. Wanneer zijn de snelheden van P_1 en P_2 gelijk.
Uitwerking: De som maakt duidelijk dat er één tijdstip is waar de snelheden gelijk zijn. Er geldt $\boldsymbol{x}_1'(t) = (2(t + 1), 4) = 2(t + 1, 2)$, dus $v_1(t) = 2\sqrt{(t + 1)^2 + 2}$. Nu oplossen $4\sqrt{t^2 + 1} = 2\sqrt{(t + 1)^2 + 4}$, of $4(t^2 + 1) = (t + 1)^2 + 4$, ofwel $3t^2 - 2t - 1 = 0$. Ontbinden: $(3t + 1)(t - 1) = 0$, omdat $t \geqslant 0$ blijft $t = 1$ als oplossing over.
Opmerkingen: Staat of valt met de juiste formule voor v_1 natuurlijk, maar weer: niet moeilijk.

12 Te bewijzen: alle verdindingslijnen tussen P_1 en P_2 hebben helling -2.
Uitwerking: Bekijk de verschilvector:

$$\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ 4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4t \\ 2t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ 4t - 2t^2 \end{pmatrix} = (t^2 - 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die vector heeft inderdaad altijd helling -2.
Opmerkingen: Kan op nog een paar manieren.

13 Voor welke t snijdt de verbindingslijn de x-as in $(3, 0)$?
Uitwerking: De lijn kun je weergeven door $\boldsymbol{x} = (4t, 2t^2) + \lambda(1, -2)$. Snijden met x-as geeft $\lambda = t^2$, en dat geeft $t^2 + 4t$ als x-coördinaat. Nu $t^2 + 4t - 3 = 0$ oplossen: $(t + 2)^2 - 7 = 0$ en dus $t = -2 + \sqrt{7}$ (want $t \geqslant 0$).
Opmerkingen: Een vergelijking maken met t als parameter kan ook. Niet moeilijk.

14 Gegeven $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$. Deze heeft een inverse functie gegeven door $f^{inv}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$. Die formule moet bewezen worden
Uitwerking: Er geldt $f(x) = (x+2)^3 + 1$; dat inverteren gaat nu makkelijk: $x = 1 + (y+2)^3$ wordt $x - 1 = (y+2)^3$ en dus $y + 2 = \sqrt[3]{x-1}$.
Opmerkingen: Als het binomium niet meteen ziet kan dit vervelend zijn. In uiterste nood kun je $f^{inv}(f(x))$ of $f(f^{inv}(x))$ uitrekenen.

15 De inhoud van het wentelichaam berekenen als het vlakdeel ingesloten door f, de x-as, en de y-as om de y-as wordt gedraaid.
Uitwerking: Uit een bijgeleverd plaatje halen we dat het vlakdeel in het tweede kwadrant ligt en dat y loopt van 0 tot $f(0) = 9$. We krijgen dus

$$\begin{aligned}\pi \int_0^9 f^{inv}(y)^2\,\mathrm{d}y &= \pi \int_0^9 4 - 4(x-1)^{\frac{1}{3}} + (y-1)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \left[4y - 3(y-1)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}(y-1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^9 \\ &= \frac{54}{5}\pi\end{aligned}$$

Het moest afgerond op één decimaal: 33,9.
Opmerkingen: Het voorschrift ging uit van numeriek integreren neem ik aan. Exact uitrekenen was niet echt lastig.

16 Er is een punt P op f waar de raaklijn horizontaal loopt en een punt Q op f^{inv} waar de raaklijn verticaal loopt. Bepaal het snijpunt van PQ met de y-as.
Uitwerking: Omdat $f'(x) = 3(x+2)^2$ is meteen duidelijk dat $P = (-2, 1)$ en bij inverteren gaat P over in Q, dus $Q = (1, -2)$. De lijn door P en Q heeft $x + y = -1$ als vergelijking: goed kijken en even P en Q als controle invullen. Het snijpunt is dus $(0, -1)$.
Opmerkingen: Niet veel rekenwerk, als je het binomium had gezien, anders moet je met $3x^2 + 12x + 12$ werken.