EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2022-05-20

1 Gegeven $f_p(x) = p \ln x$, en $g_p(x) = e^{\frac{x}{p}}$ (voor $p \neq 0$). Bewijs dat f_p en g_p elkaars inverse zijn.
Uitwerking: $f_p(g_p(x)) = p \ln(e^{\frac{x}{p}}) = p \cdot \frac{x}{p} = x$ (voor alle $x \in \mathbb{R}$), en $g_p(f_p(x)) = \exp(\frac{p \ln x}{p}) = e^{\ln x} = x$ (voor alle $x \in (0, \infty)$).
Opmerkingen: De som en de uitwerkingen in het voorschrift zijn niet volledig. Vermoedelijk wordt stilzwijgend van 'het natuurlijke domein' (en 'het natuurlijke codomein') van de functies uitgegaan.
Ik zou het correctievoorschrift slechts de helft van de punten geven.

2 In een figuur zien we de grafieken van f_{-1} en g_{-1} getekend, en het vlakdeel V begrensd door de beide grafieken en de x- en y-assen. Gevraagd de oppervlakte van V.
Uitwerking: Het snijpunt (a, b) van de beide grafieken voldoet aan $a = b = e^{-a} = -\ln a$.
Het vlakdeel bestaat uit twee symmetrische stukken: V_1, begrensd door de y-as de grafiek van g_{-1} $(0 \leqslant x \leqslant a)$ en de lijn $y = x$, en V_2, begrensd door de lijn $y = x$ de grafiek van f_{-1} en de x-as. Deze zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$.
De oppervlakte van V_1 is gelijk aan

$$\int_0^a e^{-x} - x \, \mathrm{d}x = \left[-e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^a = 1 - e^{-a} - \frac{1}{2}a^2 = 1 - a - \frac{1}{2}a^2$$

en die van V is dus gelijk aan het dubbele: $2 - 2e^{-a} - a^2 = 2 - 2a - a^2$.
Blijft nog a te bepalen: los $a = e^{-a}$ (numeriek) op: 0,5671432904. Invullen: Opp$(V) = 0{,}544061908$; dat is 0,54 in twee decimalen.
Opmerkingen: Niet echt moeilijk, je kunt ook g_{-1} van 0 tot a integreren en dan f_{-1} van a tot 1.

3 Bepaal de waarde van p waarbij de lijn $y = x$ de gemeenschappelijke raaklijn van de grafieken van f_p en g_p is.
Uitwerking: Het gemeenschappelijke raakpunt (x_0, x_0) ligt op beide grafieken en dus geldt $x_0 = e^{\frac{x_0}{p}}$. De afgeleide in x_0 moet gelijk zijn aan 1, dus $\frac{1}{p}e^{\frac{x_0}{p}} = 1$. Maar $e^{\frac{x_0}{p}} = x_0$, dus volgt $\frac{x_0}{p} = 1$ en dus $p = x_0 = e^1 = e$. We vinden $p = e$.
Opmerkingen: Een aardige vraag.

4 Een lang verhaal over weergaven van letters leidt tot de vraag het snijpunt C te bepalen van de lijn door $A = (\frac{1}{15}, \frac{4}{3})$ met richtingscoëfficiënt 4, en de horizontale lijn door $B = (1, \frac{19}{10})$.
Uitwerking: De y-coördinaat van C is dus gelijk aan die van B. De lijn door A heeft vergelijking $y - \frac{4}{3} = 4(x - \frac{1}{15})$. Na invullen van $y = \frac{19}{10}$ en wat rekenwerk vinden we $x = \frac{4}{25}$.
Opmerkingen: Het hele verhaal was voor deze vraag niet nodig geweest.

5 Een stukje van de rand van de letter wordt getekent door een bewegend punt R te volgen; dat punt hangt weer van bewegende punten P en Q af: eerst $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC}$, dan $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CB}$, en ten slotte $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$, met $0 \leqslant t \leqslant 1$. Gevraagd de R die bij $t = \frac{1}{4}$ hoort te tekenen op de uitwerkbijlage.
Uitwerking: Men kan de punten rechtstreeks uitrekenen — $P = (\frac{49}{480}, \frac{59}{40})$, $Q = (\frac{13}{32}, \frac{19}{10})$, en $R = (\frac{57}{320}, \frac{253}{160})$ — en vervolgens het punt R intekenen (rekening houden met de schaal).
Alternatief: teken P op het lijnstuk AC op een kwart, dan Q op CB ook op een kwart, en dan R on PQ weer op een kwart. Dat is minder gevoelig voor de schaal (en kan zelfs met passer en latje).
Opmerkingen: Ook hier is het hele lettergebeuren niet belangrijk. Het is gewoon werken met vectoren.

6 Nu bewijzen dat in het algemeen $\overrightarrow{OR} = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OC} + t^2 \cdot \overrightarrow{OB}$.
Uitwerking: Netjes uitschrijven (en gebruik dat $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$):

- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC} = (1-t) \cdot \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{OC}$.
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CB} = (1-t) \cdot \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{OB}$.
- $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = (1-t) \cdot \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{OQ}$.

Nu de eerste en de tweede in de derde stoppen:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\cdot\overrightarrow{OP} + t\cdot\overrightarrow{OQ}\\ &= (1-t)\big((1-t)\cdot\overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{OC}\big) + t\big((1-t)\cdot\overrightarrow{OC} + t\cdot\overrightarrow{OB}\big)\\ &= (1-t)^2\cdot\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\cdot\overrightarrow{OC} + t^2\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

Opmerkingen: Andermaal gewoon wat vectorrekening, het heeft niets met de letter te maken.

7 Nu laten zien dat, indien de formule wordt toegepast op $A = (0,4)$, $B = (2,2)$ en $C = (3,0)$ we de bewgingsvergelijkingen $x(t) = -4t^2 + 6t$, en $y(t) = 6t^2 - 8t + 4$ (met $0 \leqslant t \leqslant 1$) krijgen.
Uitwerking: Uitschrijven:

$$(1-t)^2\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + 2t(1-t)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6t-4t^2\\4-8t+6t^2\end{pmatrix}$$

Klaar.
Opmerkingen: Ik weet niet wat dit toetst, anders dan netjes werken.

8 Op het open interval $(-\pi,\pi)$ bekijken we twee functies, gegeven door $f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x}$ en $g(x) = \sin x$. Te bewijzen dat de grafieken van f en g elkaar in twee punten raken.
Uitwerking: Eerst de snijpunten: $f(x) = g(x)$ geeft $\sin 2x = 1$, en dus $2x = 2\pi + k\cdot\frac{\pi}{2}$ of $x = \pi + k\cdot\frac{\pi}{4}$, met k geheel. Binnen het gegeven interval houden we $x = -\frac{3\pi}{4}$ en $x = \frac{\pi}{4}$ over. NB Het getal 0 zit niet in het domein van f, dus we bekijken alleen punten waar $\sin x \neq 0$. In het plaatje zou de grafiek van f nog een perforatie moeten vertonen.
Dan de afgeleiden van f en g in die punten: $g'(x) = \cos x$, dus $g'(-\frac{3\pi}{4}) = \cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Omdat $f(x) = \frac{1}{2\cos x}$ de afgeleide is $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$; dan $f'(-\frac{3\pi}{4}) = \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $f'(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (want in beide gevallen is de noemer gelijk aan $2\cdot\frac{1}{2} = 1$). De afgeleiden zijn gelijk, dus de (enige) twee snijpunten zijn ook raakpunten.
Opmerkingen: Niet moeilijk, rustig werken.

9 Gegeven de functie $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ voor $x \geqslant 0$. In een plaatje zien we de grafiek van f en de raaklijn k aan de grafiek in de oorsprong. Te bewijzen: de enige punten die de grafiek van f met de x-as gemeen heeft zijn die uit het plaatje: $(0,0)$ en $(1,0)$.
Uitwerking: Ontbind de formule: $x(\sqrt{x}-1)^2$. Daaruit leest men de nulpunten van f meteen af: $x = 0$ en $x = 1$.
Opmerkingen: Een beetje flauw eigenlijk.

10 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Uitwerking: De oppervlakte is gelijk aan de integraal

$$\int_0^1 x^2 - 2x\sqrt{x} + x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{30}.$$

Opmerkingen: Niet moeilijk.

11 Als we k naar rechts opschuiven over een vector $\binom{a}{0}$ dan zal hij de grafiek van f weer raken. Bereken voor welke a dat gebeurt.
Uitwerking: De helling van k is gelijk aan 1. Dat volgt door $f'(0)$ expliciet te bepalen:

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\downarrow 0} x - 2\sqrt{x} + 1 = 1$$

We zoeken dus punten waar $f'(x) = 1$. Er geldt $f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$, dus oplossen $2x - 3\sqrt{x} = 0$, en dat geeft $(2\sqrt{x} - 3)\sqrt{x} = 0$, met als positieve oplossing $x = \frac{9}{4}$. Verder geldt $f(\frac{9}{4}) = \frac{81}{16} - \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{16}$. Het snijpunt van de raaklijn met de x-as is $(\frac{9}{4} - \frac{9}{16}, 0) = (\frac{27}{16}, 0)$.
Dus $a = \frac{27}{16}$.
Opmerkingen: Even opletten dat je er met $x = \frac{9}{4}$ nog niet bent. Verder een aardige vraag.

12 Een bladzijde tekst over lavabommen die uit vulkanen vliegen geeft ons bewegingsvergelijkingen voor die bommen:

$$\begin{cases} x(t) = 210\cos(\alpha)\cdot t \\ y(t) = 2000 + 210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

met α de hoek tussen de baan op tijdstop 0 en de positieve horizontale lijn, met $0 < \alpha < \pi$, en de afstanden in meters.

Te bewijzen: $y = 2000 + \tan(\alpha)\cdot x - \frac{1}{9000\cos^2\alpha}x^2$ (als $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$).

Uitwerking: Zolang $\cos\alpha \neq 0$ kunnen we t in x uitdrukken: $t = \frac{x}{210\cos\alpha}$. Nu netjes invullen

$$y = 2000 + \frac{210\sin(\alpha)\cdot x}{210\cos(\alpha)} - \frac{4{,}9x^2}{210^2\cos^2\alpha} = 2000 + \tan(\alpha)\cdot x - \frac{x^2}{9000\cos^2\alpha}$$

NB $210^2/4{,}9 = 9000$.

Opmerkingen: Netjes werken, meer niet.

13 Waar valt een lavabom op de grond als $\alpha = 1$ (radialen)? Voor welke t snijdt de verbindingslijn de x-as in $(3,0)$?

Uitwerking: Dit komt neer op het oplossen van

$$2000 + \tan 1\cdot x - \frac{x^2}{9000\cos^2 1} = 0$$

Dat kan door knoppen drukken, of met de *abc*-formule:

$$x = 4500\cos^2 1(\tan 1 \pm \sqrt{\tan^2 1 + \frac{8}{9\cos^2 1}} \approx 5118{,}453000$$

Het moest in honderden meters; het antwoord is dus ongeveer 5100.

NB: aangezien $\alpha = 1$ zal de bom op de positieve x-as inslaan, we moesten dus de positieve oplossing hebben.

Opmerkingen: Niet moeilijk, wel netjes werken.

Er werd nog gegeven dat $y = 0$ als de lavabom de grond raakt ...

14 Er moet worden aangetoond dat elke baan precies één punt gemeen hebben met de kromme gegeven door

$$y_1 = -\frac{1}{9000}x^2 + 4250.$$

Hierbij wordt meegegeven dat de vergelijking voor de bommen ook te schrijven is als

$$y_2 = -\frac{1+\tan^2\alpha}{9000}x^2 + \tan(\alpha)\cdot x + 2000$$

Uitwerking: Stel de twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk.

$$-\frac{1}{9000}x^2 + 4250 = -\frac{1}{9000}x^2 - \frac{\tan^2\alpha}{9000}x^2 + \tan(\alpha)\cdot x + 2000$$

dit geeft

$$\frac{(x\tan\alpha)^2}{9000} - (x\tan\alpha) + 2250 = 0$$

Dat is te ontbinden als

$$\frac{1}{9000}(x\tan\alpha - 4500)^2 = 0.$$

Dit laat zien dat $y_1(x) - y_2(x) = \frac{1}{9000}(x\tan\alpha - 4500)^2$. Hieruit lezen we in één keer af dat er één oplossing van $y_1(x) = y_2(x)$ is, namelijk $x = 4500/\tan\alpha$. Dit laat ook zien dat $y_1(x) > x_2(x)$ als $x \neq 4500/\tan\alpha$. Het snijpunt is dus een raakpunt.

Opmerkingen: Eigenlijk geen differentiaalrekening nodig: kwadraat afsplitsen is genoeg. De oplossingen in het voorschrift zijn wel wat bewerkelijk omdat de coëfficiënten onoverzichtelijk zijn.

15 Gegeven $f(x) = x + \frac{2}{x}$. Te bewijzen: als P op de grafiek van f ligt en Q en R zijn de snijpunten van de raaklijn in P met de beide asymptoten dan is P het midden van QR.
Uitwerking: De asymptoten van de grafiek van f zijn de y-as en de lijn $y = x$ ($\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 0$). Zeg $P = (p, f(p))$. Er geldt $f'(x) = 1 - 2/x^2$, dus de raaklijn in P heeft de vergelijking

$$y - \left(p + \frac{2}{p}\right) = \left(1 - \frac{2}{p^2}\right)(x - p)$$

Het snijpunt met de scheve asymptoot krijgen we door $y = x$ te stellen: na wat wegstrepen houden we $\frac{2}{p^2}x = \frac{4}{p}$ over met als oplossing $x = 2p$. Dus de x-coördinaten van Q, P, en R zijn achtereenvolgens 0, p, en $2p$; dus P is inderdaad het midden van QR.
Opmerkingen: Niet echt moeilijk.

16 Gegeven een vlieger met hoekpunten $A = (0, a)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, -1)$ en $D = (-1, 0)$. Hierin is a positief.

Voor welke a ligt D op de middelloodlijn van AB?
Uitwerking: De vector van D naar het midden van AB is $\frac{1}{2}\binom{1}{a} - \binom{-1}{0} = \binom{3/2}{a/2}$, en $\overrightarrow{AB} = \binom{1}{-a}$. Die twee moeten loodrecht op elkaar staan, dus $\frac{3}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$. We vinden $a^2 = 3$, omdat a positief is volgt $a = \sqrt{3}$.
Opmerkingen: In het voorschrift staan nog veel meer oplossingen. Niet moeilijk verder.

17 We leggen massa's in de hoekpunten: 2 in A, 1 in B en D, en a in C. Als a onbegrensd toeneemt verplaatst met zwaartepunt Z_a zich ook. Te bewijzen de limiet van Z_a voor $a \to \infty$ is gelijk aan $(1, 0)$.
Uitwerking: Het zwaartepunt is het gewogen gemiddelde van de vier hoekpunten: de totale massa is gelijk aan $a + 4$, we krijgen dus

$$\frac{1}{a+4}\left(2\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\\frac{a}{a+4}\end{pmatrix}$$

Daar

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a+4} = 1$$

volgt dat Z_a naar $(0, 1)$ convergeert.
Opmerkingen: Niet moeilijk als je weet dat je een gewogen gemiddelde moet hebben.