EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2022-06-17

1 Gegeven $f(x) = 2(2x-1)^3 + 3(2x-1)^2$. Te bewijzen $f'(x) = 48x^2 - 24x$.
Uitwerking: Welnu, $f'(x) = 6(2x-1)^2 \cdot 2 + 6(2x-1) \cdot 2 = 12(2x-1)(2x-1+1) = 24x(2x-1)$, en dat is gelijk aan het gewenste.
Opmerkingen: Flauw, duidelijk met het oog op de volgende opgave gegeven.

2 Te bepalen de lijn k die de grafiek van f in het buigpunt raakt.
Uitwerking: We nemen de tweede afgeleide: $f''(x) = 96x - 24$, deze heeft één nulpunt, namelijk $\frac{1}{4}$. Het tekenschema van f'' leert dat daar inderdaad een buigpunt optreedt. Verder geldt $f'(\frac{1}{4}) = 3 - 6 = -3$ en $f(\frac{1}{4}) = -\frac{2}{8} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.
Een vergelijking van k is dus $y - \frac{1}{2} = -3(x - \frac{1}{4})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, je kunt ook g_{-1} van 0 tot a integreren en dan f_{-1} van a tot 1.

3 Een punt P op de diagonaal AC (ongelijk aan A of C) van een vierkant $ABCD$ met zijdelengte 2 moet zó bepaald worden dat $DP \perp MP$, waar M het midden van AB is, of beter: de lengte van AP moet bepaald worden.
Uitwerking: Voer coördinaten in: $A = (0,0)$, $M = (1,0)$, en $D = (0,2)$. Met $P = (p,p)$ volgt dat het inwindig product van $\overrightarrow{MP} = (p-1,p)$ en $\overrightarrow{DP} = (p,p-2)$ gelijk aan 0 moet zijn. Dus $p^2 - p + p^2 - 2p = 0$ of $p(2p-3) = 0$, omdat $P \neq A$ volgt $p = \frac{3}{2}$, en dus $|AP| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.
Opmerkingen: Er zijn vele wegen die naar Rome leiden; ik had de eerste uit het voorschrift te pakken. Verder niet moeilijk.

4 Gegeven f op $(0,2\pi)$ door $f(x) = \frac{1}{2\sin x}$ (dus eigenlijk op $(0,\pi) \cup (\pi,2\pi)$). Te bepalen: het bereik van f.
Uitwerking: Het bereik van de $2\sin x$ is het interval $[-2,2]$; als we de nulpunten buiten beschouwing laten wordt dat $[-2,0) \cup (0,2]$. Het bereik van f is dan $(-\infty,-\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},\infty)$.
Opmerkingen: Voor de uitwerkingen uit het correctievoorschrift zou ik niet de volle punten geven; alleen de punten en functiewaarden opsporen waar de afgeleide gelijk is aan 0 is niet genoeg. De tweede uitwerking bepaalt "het minimum" en "het maximum" van f en vermeldt niet dat die lokaal zijn, en geeft ook geen argument waarom de functie naar boven en beneden onbegrensd is.
En verder is het bereik een verzameling en geen uitdrukking als "$y \geqslant \frac{1}{2}$ of $y \leqslant -\frac{1}{2}$. En zoals hierboven (tussen haakjes) vermeld: het gegeven domein van f deugt ook niet.

5 Voor elke a wordt de functie g_a op $[0,2\pi]$ gegeven door $g_a(x) = a \cdot \cos x$. Voor welke a hebben de grafieken van f en g_a géén punten gemeen?
Uitwerking: Kijken voor welke a de vergelijking $g_a(x) = f(x)$ oplossingen heeft. Die vergelijking wordt $2a \sin x \cdot \cos x = 1$, of $a \cdot \sin 2x = 1$; met $x \neq 0, \pi, 2\pi$ natuurlijk. Omdat $-|a| \leqslant a \cdot \sin 2x \leqslant |a|$ heeft de vergelijking geen oplossingen als $|a| < 1$, en wel oplossingen als $|a| \geqslant 1$: twee als $|a| = 1$, en vier als $|a| > 1$.
Opmerkingen: Het voorschrift had deze oplossing niet, maar deed moeilijk met $\frac{1}{a}$ en, erger, met gelijk stellen van f en g_a, en van f' en g'_a.

6 Een lang verhaal over testen op de ziekte van Lyme leidt tot de formule

$$T = 1000 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - 0{,}8^n\right) \qquad (n \geqslant 2)$$

Gegeven: de grafiek heeft een laagste punt. Uit de helling van T in $n = 4$ moet bepaald worden of het laagste punt links of rechts van 4 ligt.
Uitwerking: We hebben $T'(x) = 1000(\frac{-1}{x^2} - 0{,}8^x \cdot \ln 0{,}8)$ nodig en $T'(4) = 28{,}89959861$. De grafiek stijgt rond $n = 4$, het minimum ligt dus links van 4.
Opmerkingen: Ik vind het onaangekondigd heen en weer springen tussen discreet en continu niet zo mooi, maar vooruit dan maar.

7 Nu een algemene formule:

$$T = N \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n\right)$$

Op zoek naar een vuistregel kijkt met wanneer $T(n) = T(n+1)$. Gevraagd te laten zien dat dit leidt tot

$$n(n+1) \cdot p(1-p)^n = 1$$

Uitwerking: Gelijkstellen geeft

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = (1-p)^n - (1-p)^{n+1} \text{ ofwel } \frac{1}{n(n+1)} = (1-p)^n(1-1+p)$$

en dus, inderdaad, $1 = n(n+1) \cdot p(1-p)^n$.
Opmerkingen: Wiskundig een vraag van niks; ik weet niet wat dit test. De inleidende tekst is verwarrend (en heeft niks met de som te maken): als p bekend is kan men n bepalen en daarom bepaalt men voor welke p de gelijkheid $T(n) = T(n+1)$ geldt.

8 Uit de relatie wordt een tabel gemaakt en meegegeven. Gegeven $p = 0{,}025$ wil men de grootste N hebben waarbij de minimum T-waarde niet groter is dan 750.
Uitwerking: De tabel geeft dat bij $p = 0{,}025$ we $n = 7$ kunnen nemen. We moeten dan de ongelijkheid

$$750 \geqslant N \cdot \left(1 + \frac{1}{7} - (1 - 0{,}025)^7\right)$$

oplossen. Dat levert $N \leqslant 2456{,}877$.
Opmerkingen: Ik zie niet wat dit test, anders dan de juiste toetsen op een rekenmachine intikken. In tegenstelling tot het voorschrift zou ik bij 2457 wel punten in mindering brengen.

9 Gegeven de functie f door $f(x) = 4/\sqrt{x+1}$ (voor $x \geqslant -1$ kennelijk). Bepaal q zó dat de oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de x-as, de grafiek van f, en de lijnen $x = 0$ en $x = q$ de helft is van die van de rechthoek met basis $[0, q]$ en hoogte 4.
Uitwerking: Die oppervlakte is

$$\int_0^q \frac{4}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[8\sqrt{x+1}\right]_0^q = 8\sqrt{q+1} - 8$$

en dat moet gelijk zijn aan $2q$. Oplossen: $(2q+8)^2 = 64(q+1)$, of $4(q^2+8q+16) = 4 \cdot (16q+16)$, en dus $q^2 - 8q = 0$. Dus $q = 0$ (niet interessant) of $q = 8$ (wel interessant).
Opmerkingen: Even integreren.

10 Gevraagd de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van de inverse, g, van f, en de lijn $x = 4$.
Uitwerking: Het voorschrift van g eerst opstellen via $x = f(y)$ oplossen naar y. Dat geeft $g(x) = \frac{16}{x^2} - 1$.
De oppervlakte is dan gelijk aan

$$\int_a^4 \frac{4}{\sqrt{x+1}} - \frac{16}{x^2} + 1\,\mathrm{d}x = \left[8\sqrt{x+1} + \frac{16}{x} + x\right]_a^4 = 8\sqrt{5} + 8 - \left(8\sqrt{a+1} + \frac{16}{a} + a\right)$$

waarbij a de waarde is waarvoor $f(a) = a = g(a)$. Die waarde is ongeveer 2,226772379. Invullen levert een oppervlakte van 2,105908602, afgerond 2,1.
Opmerkingen: De eerste echte meertrapsvraag: inverteren, oplossen, integreren.

11 Twee bewegende punten P en Q, met parametriseringen

$$\begin{cases} x_P(t) = 2\cos t \\ y_P(t) = 2\sin t \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_Q(t) = 2 + \cos t \\ y_Q(t) = \sin t \end{cases}$$

Wanneer staan OP en OQ loodrecht op elkaar.
Uitwerking: Stel het inwendig product van de plaatsvectoren is gelijk aan $4\cos t + 2\cos^2 t + 2\sin^2 t$. Dat gelijk aan 0 stellen geeft $4\cos t + 2 = 0$, of $\cos t = -\frac{1}{2}$. De waarden van t die we krijgen zijn $\frac{2\pi}{3}$ en $\frac{4\pi}{3}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

12 Te bewijzen: het snijpunt, A, van de lijn door P en Q met de x-as is onafhankelijk van t.
Uitwerking: Een vectorvoorstelling van de lijn is

$$\begin{pmatrix}2\cos t\\ 2\sin t\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2-\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$$

De tweede coördinaat nul stellen geeft $(2-\lambda)\sin t = 0$, dus $\lambda = 2$ (tenzij $t = 0$ of $t = \pi$ maar dan liggen P en Q op de x-as). De eerste coördinaat is dan gelijk aan 4, onafhankelijk van t, dus $A = (4, 0)$ ligt op elke lijn.
Opmerkingen: Goed te doen; de som en modeluitwerkingen hielden geen rekening met de gevallen dat de lijn door P en Q de hele x-as is.

13 Welk percentage van de tijd ligt het midden M van PQ *buiten* de cirkels die P en Q doorlopen.
Uitwerking: In plaatjes wordt aannemelijk gemaakt dat M binnen de cirkel van Q begint, dan een tijdje buiten beide cirkels ligt en dat binnen de cirkel van P komt. De zaal is symmetrisch: van π tot 2π gebeurt het omgekeerde.
Voor M hebben we $x_M(t) = 1 + \frac{3}{2}\cos t$ en $y_M(t) = \frac{3}{2}\sin t$. Nu kijken wanneer M op de cirkel van Q ligt: dat betekent $(x_m(t)-2)^2 + y_m(t)^2 = 1$ oplossen; dat wordt $\cos t = \frac{3}{4}$. Dus $t_1 = \arccos\frac{3}{4} \approx 0{,}7227342478$ (was al gegeven maar toch even controleren).
Op de cirkel van P geldt $x_m(t)^2 + y_M(t)^2 = 4$, dat wordt $\cos t = \frac{1}{4}$. Dus $t_2 = \arccos\frac{1}{4} \approx 1.318116072$.
Wegens de symmetrie is het antwoord gelijk aan $(t_2 - t_1)/\pi \approx 0{,}1895159207$, maar dan omgerekend naar procenten. In hele procenten komen we op 19%.
Opmerkingen: Met behulp van de plaatjes kun je heel wat verificaties overslaan.

14 De functie f is gegeven door

$$f(x) = |x-1| + \frac{x-5}{2x-5}$$

Met een plaatje waarin een schevenasymptoot te zien is. We moeten die bepalen.
Uitwerking: De asymptoot ligt naar links, dus $|x-1| = 1-x$. We kunnen $f(x)$ wat herschrijven; de tweede term convergeert naar $\frac{1}{2}$ als $x \to -\infty$ dus werken we daar naar toe:

$$f(x) = 1 - x + \frac{x-5}{2x-5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -x + \frac{3}{2} - \frac{5}{2(2x-5)}$$

Daar lezen we uit af dat de asymptoot gegeven wordt door $y = -x + \frac{3}{2}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

15 Vor welke x geldt $f(x) < 0$?
Uitwerking: Links van de verticale asymptoot, als $x < \frac{5}{2}$ dus, geldt $\frac{x-5}{2x-5} > 0$, dus zeker $f(x) > 0$.
Rechts van de verticale asymptoot geldt

$$f(x) = x - 1 + \frac{x-5}{2x-5} = \frac{2x(x-3)}{2x-5}$$

met slechts één nulpunt: $x = 3$. Tekenschema of anderszins: $f(x) < 0$ voor $\frac{5}{2} < x < 3$.
Opmerkingen: Niet echt moeilijk. De gegeven informatie dat er bij $x = 1$ een knikpunt zit werd verder niet gebruikt.

16 Gegeven twee punten, P en Q, op de grafiek van $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$, met x-coördinaten respectievelijk p en $2p$. Voor welke p heeft de lijn door P en Q een richtingscoëfficiënt van 6.
Uitwerking: Het verticale verschil is gelijk aan $2p\mathrm{e}^{2p} - p\mathrm{e}^p = p(2\mathrm{e}^{2p} - \mathrm{e}^p)$. Het horzontale verschil is gelijk aan p. Het quotiënt van beide is dus gelijk aan $2\mathrm{e}^{2p} - \mathrm{e}^p$. Dt gelijk stellen aan 6 levert $2\mathrm{e}^{2p} - \mathrm{e}^p - 6 = 0$ of $2\mathrm{e}^p + 3)(\mathrm{e}^p - 2) = 0$, met als enige oplossing $p = \ln 2$.
Opmerkingen: Verkapte vierkantsvergelijking, verder niet opwindend.