EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2022-07-06

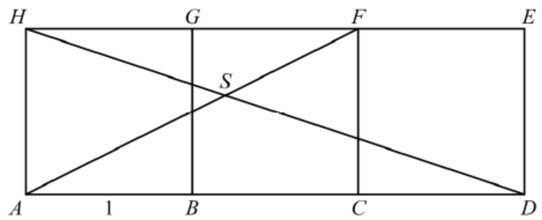
1 Te bewijzen de functie F gegeven door $F(x) = \ln(x^2 - 11x + 30)$ is een primitieve van f, gegeven door $f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6}$.
Uitwerking: Differentieer F:

$$F'(x) = \frac{2x - 11}{x^2 - 11x + 30} = \frac{(x-6) + (x-5)}{(x-5)(x-6)} = f(x)$$

Opmerkingen: In principe flauw en duidelijk met het oog op de volgende opgave gegeven. Maar, ..., de functie F heeft niet hetzelfde domein als f: f is op $\mathbb{R} \setminus \{5, 6\}$ gedefinieerd en F slechts op $\mathbb{R} \setminus [5, 6]$. Dit leidde tot een aanvulling op het correctievoorschrift: iedereen drie punten want de "noodzakelijke voorwaarde $x > 6$" ontbrak. Die voorwaarde is niet noodzakelijk; op het interval $(-\infty, 5)$ geldt het gestelde ook.

2 Twee gebieden V en W zijn gegeven, beide begrensd door de x-as en de grafiek van f; daarbij V door de lijnen $x = 7$ en $x = 9$, en W door de lijnen $x = 9$ en $x = p$ met $p > 9$. Voor welke p zijn hun oppervlakten gelijk?
Uitwerking: De oppervlakte van V is gelijk aan $F(9) - F(7) = \ln 12 - \ln 2 = \ln 6$. Die van W is gelijk aan $F(p) - F(9) = \ln(p^2 - 11p + 30) - \ln 12$. Dat verschil moet gelijk zijn aan $\ln 6$, en dat geeft ons de vergelijking $p^2 - 11p + 30 = 6 \times 12 = 72$, en dus $p^2 - 11p - 42 = 0$, of $(p - 13)(p + 4) = 0$. Omdat $p > 9$ moeten we de oplossing $p = 14$ hebben.
Opmerkingen: Niet moeilijk, met kennis van de eigenschappen van de logaritme.

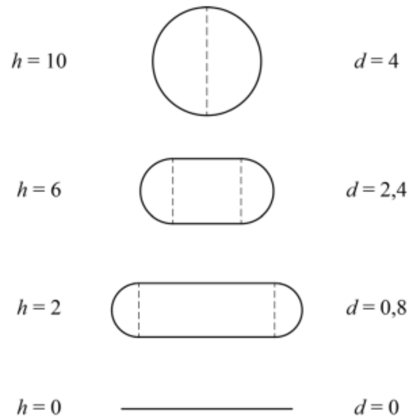
3 Nu de absolute waarde van f bekijken: $g(x) = \left|f(x)\right|$. We krijgen gegeven dat de grafiek van g symmetrisch is ten opzochte van de lijn $x = \frac{11}{2}$ en dat de grafiek in $(\frac{11}{2}, 0)$ een knikpunt heeft. Gevraagd de hoek tussen de beide (verschillende) raaklijnen in dat knikpunt te bepalen, in graden.
Uitwerking: De afgeleide van f is gelijk aan $\frac{-1}{(x-5)^2} + \frac{-1}{(x-6)^2}$. Invullen van $\frac{11}{2}$ levert $-1/(\frac{1}{4}) - 1/(\frac{1}{4}) = -8$. Dus f is dalend nabij $\frac{11}{2}$ en de linker raaklijn aan de grafiek van g heeft richtingscoëfficiënt -8. Wegens symmetrie is die van de rechter raaklijn dus gelijk aan 8. De hoek tussen de rechter raaklijn en de y-as is gelijk aan $\frac{\pi}{2} - \arctan 8$; omgerekend in graden is dat $7{,}12501637°$. De hoek tussen de raaklijnen is daar het dubbele van is $14{,}25003275°$. Afgerond op hele graden: $14°$.
Opmerkingen: Niet moeilijk; wel opletten, maar het gegeven plaatje zal wel geholpen hebben.



Figuur 1. Opgaven 4 en 5

4 In Figuur 1 geldt $\overrightarrow{AB} = \binom{1}{0}$ en $\overrightarrow{AH} = \binom{0}{1}$. Te bewijzen: $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{5}\binom{6}{3}$.
Uitwerking: Gegeven is dat we drie vierkanten zien, dus de lijn door A en F heeft vergelijking $2y = x$, en die door H en D heeft vergelijking $x + 3y = 3$. Invullen van de eerste in de tweede geeft $5y = 3$, dus $y = \frac{3}{5}$ en $x = \frac{6}{5}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk wel een zwaar woord — bewijs — voor het opstellen en oplossen van een stelsel(tje) vergelijkingen.

5 Onderzoek of BS en HD loodrecht op elkaar staan.
Uitwerking: De vector $\overrightarrow{BS}$ is gelijk aan $\frac{1}{5}\binom{1}{3}$, en die staat loodrecht op $\overrightarrow{HD} = \binom{3}{-1}$ (het inwendig product is gelijk aan 0).
Opmerkingen: Ook niet moeilijk. Het kan op meer manieren natuurlijk.



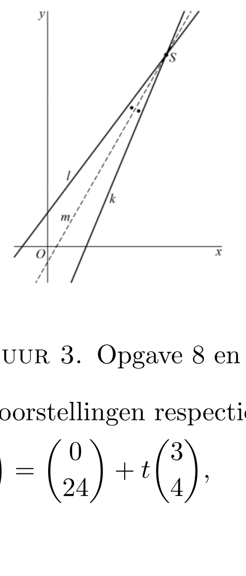
FIGUUR 2. Opgave 6

6 Een lang verhaal over een tube (voor shampoo, tandpasta, ...) kan samengevat worden in Figuur 2. Het verband tussen h en d is lineair en de eenheid is de centimeter. De vraag is of de inhoud van de tube, gegeven door $I = \int_0^{10} A(h)\,\mathrm{d}h$, groter dan of gelijk is aan $80\,\mathrm{cm}^3$; hierin is $A(h)$ de oppervlakte van de doorsnede op hoogte h.
Uitwerking: We lezen meteen af dat $d = \frac{2}{5}h$. Verder is de omtrek O altijd gelijk aan 4π; hieruit halen we de lengte l van de rechthoek als functie van h. We hebben $O = 2l + \pi d$ of $4\pi = 2l + \frac{2}{5}\pi h$, en dat geeft $l = 2\pi - \frac{\pi}{5}h$. De oppervlakte van de rechthoek is dan $l \cdot d = \frac{4\pi}{5}h - \frac{2\pi}{25}h^2$ en de twee halve cirkelschijfjes samen leveren $\frac{\pi}{25}h^2$. We zien dat $A(h) = (\frac{4}{5}h - \frac{1}{25}h^2)\pi$ en dus

$$I = \pi \int_0^{10} \frac{4}{5}h - \frac{1}{25}h^2\,\mathrm{d}h = \pi \left[\frac{2}{5}h^2 - \frac{1}{75}h^3\right]_0^{10} = \pi\left(40 - \frac{40}{3}\right) = \frac{80\pi}{3}$$

Omdat $\pi > 3$ volgt dat $I > 80\,\mathrm{cm}^3$.
Opmerkingen: Interessant: een tweetraps vraag, eerst moet de functie $A(h)$ gemaakt worden.

7 Bij een punt $P = (p, \mathrm{e}^p)$ op de grafiek van de exponentiële functie maken we twee vierkanten met P als hoekpunt: V, met een zijde op de y-as, en W, met een zijde op de x-as. Voor welke p is de verhouding $\mathrm{opp}(V)/\,\mathrm{opp}(W)$ maximaal?
Uitwerking: Er geldt $\mathrm{opp}(V) = p^2$ en $\mathrm{opp}(W) = \mathrm{e}^{2p}$. We onderzoeken dus waar $p^2\mathrm{e}^{-2p}$ zijn maximum aanneemt. De afgeleide is gelijk aan $2p\mathrm{e}^{-2p} - 2p^2\mathrm{e}^{-2p} = 2p(1-p)\mathrm{e}^{-2p}$. De nulpunten zijn $p = 0$ en $p = 1$. Het tekenschema levert een minimum voor $p = 0$ (met waarde 0) en een maximum voor $p = 1$ (met waarde e^{-2}).
Opmerkingen: Niet slecht: even nadenken over welke functie gemaximaliseerd moet worden mag wel eens. Overigens staat in het voorschrift een (tik)fout: die heeft e^{2p} in plaats van e^{-2p} in de eerste uitwerking.



FIGUUR 3. Opgave 8 en 9

8 Gegeven drie lijnen k, l, en m met vectorvoorstellingen respectievelijk

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{en} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

Het snijpunt van k en l heet S. De waarden van a en b kunnen zó gekozen worden dat m de bissectrice van de scherpe hoek(en) tussen k en l vormt, zie Figuur 3. Te bewijzen: $a = \frac{7}{4}$.
Uitwerking: Wie Pythagorese drietallen herkent ziet meteen dat de lengten van de richtingsvectoren van k en l gelijk zijn aan respectievelijk 13 en 5. Een richtingsvector van m is dan:

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix}112\\64\end{pmatrix}$$

We nemen de som omdat de naar het noord-oosten moeten wijzen. Dan geldt inderdaad $a = \frac{112}{64} = \frac{7}{4}$.
Opmerkingen: Even nadenken wellicht, maar niet slecht.

9 Bereken de waarde van b.
Uitwerking: Eerst S bepalen door

$$\begin{pmatrix}29\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\24\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

op te lossen. We vinden $s = 11$ en $t = 28$, met $S = (84, 136)$. Daar S op m ligt volgt $84 = u$ en $138 = b + \frac{7}{4}u$, dus $b = 138 - \frac{7}{4} \cdot 84 = 138 - 147 = -11$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

10 Een verhaal over de conditiescore van gebouwen leidt tot de formule

$$C = 6 - 5\left(1 - \frac{t}{L}\right)^{\frac{1}{2,3}} \tag{1}$$

Hierbij wordt C nog naar beneden afgerond tot een score in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De L is een constante die bij een gebouw hoort (theortische levensduur) en t de tijd in jaren. Gevraagd: als $L = 25$, hoe lang krijgt het gebouw dan score 2?
Uitwerking: Dit komt neer op het oplossen van de ongelijkheden

$$2 \leqslant 6 - 5\left(1 - \frac{t}{25}\right)^{\frac{1}{2,3}} < 3$$

Dat bouwen we om tot

$$4 \geqslant 5\left(1 - \frac{t}{25}\right)^{\frac{1}{2,3}} > 3 \qquad \text{of} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^{2,3} \geqslant 1 - \frac{t}{25} > \left(\frac{3}{5}\right)^{2,3}$$

of zelfs

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{2,3} \leqslant \frac{t}{25} < 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{2,3}$$

Tijd voor een rekenmachientje: $10{,}03602484 \leqslant t < 17{,}27874520$. Dat geeft een interval dat, afgerond, 7,2 jaren lang is.
Opmerkingen: In principe niet moeilijk. Het voorschrift gaat er vanuit dat de leerling meteen naar de oplosknop grijpt. Maar dan kan verkeerd uitpakken, zie bijvoorbeeld som 16 op het examen Wiskunde-B havo van 13-05-2022.

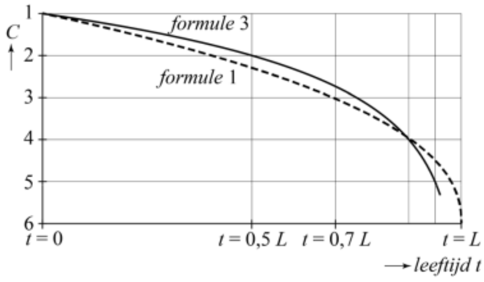
11 We kunnen t uitdrukken in L en C met een uitdrukking van de vorm

$$t = L - L \cdot a \cdot (6 - C)^b$$

Bepaal a en b (eventueel afgerond op drie decimalen).
Uitwerking: Netjes omwerken leidt uiteindelijk tot

$$t = L - L \cdot 5^{-2,3}(6 - C)^{2,3}$$

Dus $b = 2{,}3$ (hoeft niet afgerond) en $a = 5^{-2,3} \approx 0{,}02468135451 \approx 0{,}025$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, netjes werken.



FIGUUR 4. Opgave 12

12 Nieuwe inzichten:

$$C = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(1 - \frac{t}{L}\right) \tag{3}$$

De twee formules worden vergeleken in Figuur 4. Bereken (exact) na hoeveel procent van de theoretische levensduur het gebouw score 3 bereikt, volgens de nieuwe formule.
Uitwerking: Dus oplossen (NB de functie is stijgend):

$$3 = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(1 - \frac{t}{L}\right) \tag{3}$$

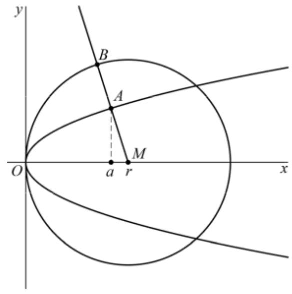
Dat geeft ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(1 - \frac{t}{L}\right) = 2$, of $1 - \frac{t}{L} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Dus $t = \frac{3}{4} \cdot L$, dat dus na 75% van de theoretische levensduur.
Opmerkingen: Wel een beetje verwarrend allemaal: de grafieken ondersteboven, logaritmen in basis $\frac{1}{2}$, maar uiteindelijk wel te doen.

13 Gegeven, voor $p \in [0, 4]$, de functie f_p op $[0, \frac{\pi}{2}]$ door $f_p(x) = -2\cos^2(x) + p \cdot \cos(x) - 1$. Bepaal het tweede nulpunt (naast $x = 0$) van f_3.
Uitwerking: Oplossen: $-2\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$ ofwel $(\cos x - 1)(-2\cos x + 1) = 0$. Dat geeft $\cos x = 1$, met $x = 0$, en $\cos x = \frac{1}{2}$, met $x = \frac{2}{3}\pi$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

14 Aan te tonen: voor de x-coördinaat a van het hoogste punt van de grafiek van f_p geldt $\cos a = \frac{1}{4}p$.
Uitwerking: Differentiëren: $f_p'(x) = -4\cos(x) \cdot - \sin(x) - p\sin(x)$. Nul stellen geeft $(4\cos(x) - p)\sin(x) = 0$, dus $\cos(x) = \frac{1}{4}p$ of $x = 0$. Op het domein is $\sin(x)$ verder positief, en $4\cos(x) - p$ is dalend; dus voor $p < 4$ geldt: f_p stijgt tot de a met $\cos(a) = \frac{1}{4}p$ en daalt daarna (voor $p = 4$ is f_p dalend).
Opmerkingen: Niet moeilijk.

15 Te bewijzen de hoogste punten van de grafieken liggen op de grafiek van $y = \cos(2x)$, met $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Uitwerking: De a die voor p de top aanwijst voldoet aan $\cos(a) = \frac{1}{4}p$, of $p = 4\cos(a)$. Dus $f(a) = -2\cos^2(a) + p\cos(a) - 1 = 2\cos^2(a) - 1 = \cos(2a)$.
Opmerkingen: Niet echt moeilijk, misschien even doordenken.

16 Gegeven de (liggende) parabool met bewegingsvergelijkingen $x(t) = t^2$ en $y(t) = t$. Verder $M = (r, 0)$ (met $r > \frac{1}{2}$) en $A = (a, \sqrt{a})$. Deze zijn zodanig gekozen dat de (halve) lijn door M en A de parabool in A loodrecht snijdt. Te bewijzen: $a = r - \frac{1}{2}$.
Uitwerking: De afstand tussen M en A is gelijk aan $\sqrt{(a - r)^2 + a} = \sqrt{(a - (r - \frac{1}{2}))^2 + r - \frac{1}{4}}$. Dat is dus minimaal als $a = r - \frac{1}{2}$ en de cirkel om M met straal $\sqrt{r - \frac{1}{4}}$ raakt de parabool in A. De cirkel en de parabool hebben in A dezelfde raaklijn en die staat dus loodrecht op MA.
Opmerkingen: Deze oplossing staat niet in het voorschrift; daar wordt telkens de raakvector in (t^2, t) bepaald en vergeleken met $\overrightarrow{MA}$. Mijn oplossing is in de geest van de beruchte uitwerking van opgave 14 van het eerste tijdvak.



FIGUUR 5. Opgave 17

17 Neem nu (zie Figuur 5) de cirkel met straal r om M en het snijpunt B van de halflijn MA met die cirkel. Bepaal nu r zó dat A het midden van lijnstuk MB is.

Uitwerking: Uit de vorige uitwerking halen we dat $|MA| = \sqrt{r - \frac{1}{4}}$ en omdat $|MB| = r$ moeten we dus $r^2 = 4(r - \frac{1}{4})$ oplossen; na kwadraat afsplitsen krijgen we $(r-2)^2 = 3$. Omdat $r > \frac{1}{2}$ moeten we de oplossing $r = 2 + \sqrt{3}$ hebben.

Opmerkingen: Niet moeilijk meer (met de impliciete leesregel dat M en A als in de vorige opgave zijn); uit de andere oplossingen van opgave 16 volgt eveneens snel dat $|MA| = \sqrt{r - \frac{1}{4}}$.