EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2023-05-11

1 Gegeven $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, voor $x > 0$. Te berekenen: het minimum van de functie f.
Uitwerking: De afgeleide wordt gegeven door $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$. Deze is gelijk aan 0 alleen voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Op $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ is f' negatief, op $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty)$ is f' positief; er is dus inderdaad één minimum dat aangenomen wordt in $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. De waarde van het minimum is $2\sqrt{2}$.
Opmerkingen: Zou niet moeilijk moeten zijn.
Het is wel leuker dit via rekenkundig- en meetkundig gemiddelde te doen: $2x + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$, met gelijkheid alleen als $2x = \frac{1}{x}$ en dat geldt als $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2 Gegeven verder de scheve asymptoot, de lijn k, van de grafiek van f en $a > 0$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door k, de grafiek van f, en de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = 2a$. Aan te tonen dat de oppervlakte van V onafhankelijk is van de waarde van a.
Uitwerking: De vergelijking van k wordt niet gegeven, maar het is duidelijk dat dit $y = 2x$ is, omdat $f(x) = 2x = \frac{1}{x}$ limiet 0 heeft voor $x \to \infty$.
De oppervlakte van V is dus gelijk aan

$$\int_a^{2a} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln x\big]_a^{2a} = \ln(2a) - \ln a = \ln 2$$

inderdaad, onafhankelijk van a.
Opmerkingen: Ook niet moeilijk, de asymptoot was een punt waard.

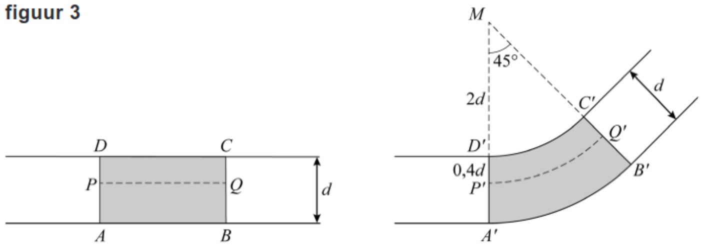
3 Het vlakdeel tussen de grafiek van f en de lijn $y = 3$ wordt om diezelfde lijn $y = 3$ gewenteld. Gevraagd de inhoud van het wentellichaam.
Uitwerking: Eerst $f(x) = 3$ oplossen: $f(x) - 3 = 2x - 3 + \frac{1}{x} = (2x-1)(1-\frac{1}{x})$, de snijpunten zijn dus bij $x = \frac{1}{2}$ en $x = 1$.
De inhoud is dan

$$\begin{aligned}
\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} (f(x)-3)^2\,\mathrm{d}x &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4x^2 - 12x + 13 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 13x - 6\ln x - \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \pi \left(\frac{4}{3} - 6 + 13 - 0 - 1 - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{13}{2} + 6\ln\frac{1}{2} + 2\right) \\
&= \pi \left(\frac{25}{6} - 6\ln 2\right)
\end{aligned}$$

Bij benadering 0,02445
Opmerkingen: Geen slechte vraag, maar waarom moest dit in twee decimalen?

4 Een heel verhaal over het buigen van platen leidt tot dit plaatje:

figuur 3



Bij het buigen van de plaat vervormt $ABCD$ tot $A'B'C'D'$, waar bij PQ en $P'Q'$ even lang zijn (dat is de "neutrale lijn").

Gevraagd hoeveel procent het vlakdeel $A'B'C'D'$ groter is dan $ABCD$.

Uitwerking: In de tekst staat dat de plaat even dik blijft (en wel d mm). De boog $P'Q'$ is $\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2{,}4d\,\mathrm{mm} = 0{,}6\pi d\,\mathrm{mm}$ lang. Dat is dus de lengte van AB; de rechthoek $ABCD$ heeft dus oppervlakte $0{,}6\pi d^2\,\mathrm{mm}^2$. De oppervlakte van het gebogen gebied $A'B'C'D'$ is gelijk aan $\frac{\pi}{8}\bigl((3d)^2-(2d)^2\bigr)\,\mathrm{mm}^2 = \frac{5}{8}\pi d^2\,\mathrm{mm}^2$. Het quotient $\frac{5}{8}/\frac{3}{5}$ is gelijk aan $\frac{25}{24}\approx 1{,}0416$ en dat geeft een groeipercentage van 4 (afgerond).
Opmerkingen: Wel aardig, met de verborgen AB.

5 De formule

$$F = \frac{R\cdot d^2}{V}\left(1+\frac{4d}{V}\right)$$

Gegeven: als $d = 10\,\mathrm{mm}$ en $V = 200\,\mathrm{mm}$ dan moet F ten minste gelijk aan $420\,\mathrm{kN/m}$.
Hoe groot moet F zijn als $V = 100\,\mathrm{mm}$?
Uitwerking: Als we alles invullen komt er $420 = \frac{3}{5}\cdot R$ in de gegeven situatie.
In de nieuwe situatie krijgen we $F = \frac{7}{5}\cdot R = \frac{7}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot R = \frac{7}{5}\cdot 420 = 980\,\mathrm{kN/m}$
Opmerkingen: Gewoon rekenwerk.

6 De opening van de matrijs hangt (kennelijk) van d af: $V = d^{1{,}75}$.
Bij welke plaatdikte is F minimaal?
Uitwerking: Het makkelijkst lijkt $V = d^{\frac{7}{4}}$ invullen: $F = R\cdot d^{\frac{1}{4}}(1+4d^{-\frac{3}{4}}) = R(d^{\frac{1}{4}}+4d^{-\frac{1}{2}})$.
Nu differentiëren: $F'(d) = R(\frac{1}{4}d^{-\frac{3}{4}} - 2d^{-\frac{3}{2}})$. Gelijk aan nul stellen levert uiteindelijk $d = 8^{\frac{4}{3}} = 16$. Aangezien gegeven was dat er een minimum is is dit genoeg.
Opmerkingen: Even oppassen met die machten, verder goed te doen. Als in opgave 1: rekenkundig en meetkundig gemiddelde leveren $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}d^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}d^{\frac{1}{4}}+4d^{-\frac{1}{2}}) \geqslant \sqrt[3]{1}$. Dan geldt $F(d)\geqslant 3$ met gelijkheid als $\frac{1}{2}d^{\frac{1}{4}} = 4d^{\frac{3}{4}}$, en dat levert ook $d = 16\,\mathrm{mm}$.

7 Een punt P beweegt via $x_P(t) = 2t$ en $y_P(t) = 2t^2$. Het midden van OP is M. De vector $\overrightarrow{MP}$ wordt over 90° gedraait, met de klok mee, en geeft $\overrightarrow{MQ}$. Aan te tonen dat $x_Q(t) = t+t^2$ en $y_Q(t) = t^2-t$.
Uitwerking: We hebben $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MP} = \binom{t}{t^2}$. Met de klok meet krijgen we $\overrightarrow{MQ} = \binom{t^2}{-t}$. En dus, inderdaad, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MQ} = \binom{t}{t^2}+\binom{t^2}{-t} = \binom{t+t^2}{t^2-t}$.
Opmerkingen: Ik weet niet wat dit toetst. Rechtsom draaien?

8 Gegeven de vaart van P: $\sqrt{4+16t^2}$. Deze is gelijk aan een vaste factor c maal de vaart van Q. Te berekenen c.
Uitwerking: We hebben $x'_Q(t) - 1 + 2t$ en $y'_Q(t) = 2t-1$. De vaart van Q is dus $\sqrt{(1+2t)(2+(2t-1)^2}$ en dat is gelijk aan $\sqrt{2+8t^2}$. We vinden $c = \sqrt{2}$.
Opmerkingen: Ik heb van natuurkundestudenten geleerd dat de lengte van de snelheids*vector* de *vaart* wordt genoemd. Het rekenwerk was zo eenvoudig dat men ook gewoon had kunnen vragen hoe het zit met de relatie tussen de vaarten van P en Q.

9 Te bewijzen dat de lengte L van Q gelijk is aan $|t|\cdot\sqrt{2+2t^2}$.
Uitwerking: We hebben $\overrightarrow{QP} = \binom{t-t^2}{t^2+t}$ met lengte $\sqrt{(t-t^2)^2+(t^2+t)^2} = \sqrt{2t^2+2t^4}$. Nu $|t|$ buiten de haakjes halen (en $\sqrt{2}$ ook maar), er komt $\sqrt{2}\cdot|t|\cdot\sqrt{1+t^2}$.
Opmerkingen: Een beetje flauw eigenlijk.

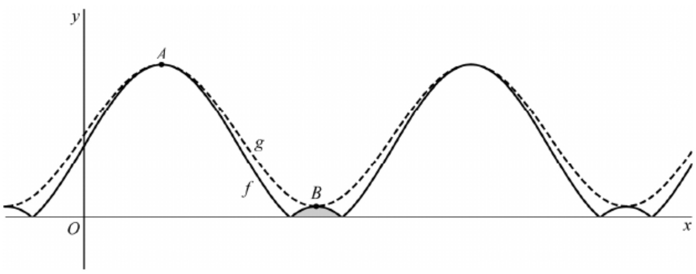
10 Gevraagd de limiet van de helling van de grafiek van L als t van links tot 0 nadert.
Uitwerking: De linkerafgeleide van L in 0 dus:

$$\lim_{t\uparrow 0}\frac{-t\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+t^2}-0}{t} = -\sqrt{2}$$

Opmerkingen: Het voorschrift nam de limiet van de afgeleide. Dat is wat bewerkelijker wat rekenwerk betreft. Aangezien gegeven is dat de limiet bestaat mogen we inderdaad de linkerafgeleide nemen.

11 We beginnen met f, gegeven door $f(x) = \left|\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right|$, met deze grafiek:

figuur



Gevraag de sinusoïde gegeven door $g(x) = a + b\sin x$ die de gestippelde grafiek oplevert.
Uitwerking: We hebben $A = (\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $B = (\frac{3\pi}{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (want $|-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}| = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$).
Het verschil tussen de y-coördinaten is $\sqrt{3}$, dus $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; en a is gelijk aan hun gemiddelde, dus $a = 1$.
Opmerkingen: Als je weet wat a en b doen is het niet moeilijk. Eventueel $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ invullen en de vergelijkingen naar a en b oplossen.

12 Gevraagd de oppervlakte van het kleine grijze vlakdeeltje bij B.
Uitwerking: Eerst de grenzen maar: $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ oplossen: $x = \frac{4\pi}{3}$ of $x = \frac{5\pi}{3}$. En nu de functie met een minteken integreren:

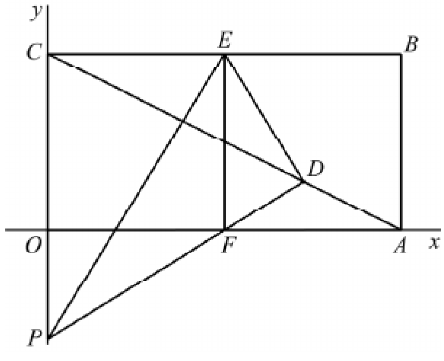
$$\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} -\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \Big[\cos(x) - \frac{x}{2}\sqrt{3}\Big]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

Opmerkingen: Even opletten met het minteken; verder niet moeilijk, hoop ik. Overigens is het vlkadeel wel klein: $\approx 0{,}0931003173$.

13 De grafieken van $f(x) = \ln x$ en $g(x) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - \ln x)$ snijden elkaar loodrecht.
Uitwerking: Eerst het snijpunt bepalen: $\ln x = 1 + e^2(1 - \ln x)$ wordt na omschrijven $0 = (1+\mathrm{e}^2)(1-\ln x)$, met als oplossing $x = \mathrm{e}$. De afgeleiden zijn $\frac{1}{x}$ en $-\frac{\mathrm{e}^2}{x}$. Als we $x = \mathrm{e}$ invullen komt er $\frac{1}{\mathrm{e}}$ en $-\mathrm{e}$, met product gelijk aan -1 de grafieken (hun raaklijnen) snijden dus loodrecht.
Opmerkingen: De grafieken waren meegeleverd en het bestaan van *het* snijpunt was dus al gegeven. Niet moeilijk.

14 Bepaal q zó dat de snijpunten van de grafieken met de horizontale lijn $y = q$ onderlinge afstand 3 hebben èn zó dat het punt op de grafiek van g links van het snijpunt met de grafiek van f ligt.
Uitwerking: We zoek dus x en y zó dat $g(x) = f(y) = q$ en $y - x = 3$. We krijgen twee vergelijkingen: $q = 1 + \mathrm{e}^2(1 - \ln x)$ en $q = \ln(x + 3)$. Maple heeft daar geen moeite mee: $\{q = 1{,}699765911, x = 2{,}472666152\}$.
We kunnen er ook één vergelijking van maken: $1 + \mathrm{e}^2(1 - \ln x) = \ln(x + 3)$. Die kan waarschijnlijk wel met de solve-knop.
Opmerkingen: Tsja, vergelijking opstellen en knoppen drukken. Overigens is er algebraïsch geen goed garen van de vergelijking te spinnen. (Maple gaf het op.)

15 Gegeven $O = (0, 0)$, $A = (8, 0)$, en $C = (0, 4)$ in de rechthoek $OABC$.



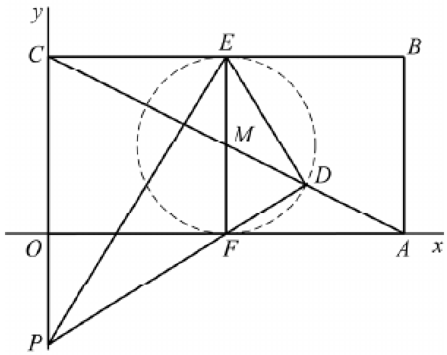
Er geldt $P = (0, p)$, met p negatief. Verder zijn E en F de middens van respectievelijk BC en OA. De lijn door E en F is de bissectrice van $\angle PED$.

Gevraagd dit te bewijzen voor het geval $p = -2$.

Uitwerking: De vector $\overrightarrow{EP}$ is gelijk aan $\binom{-4}{-6}$. Nu nog D bepalen: die ligt op de lijnen met vergelijking $x + 2y = 8$ (door A en C) en $x - 2y = 4$ (door P en F). Oplossen: $D = (6, 1)$, en dus $\overrightarrow{ED} = \binom{2}{-3}$. De twee gevonden vectoren liggen gespiegeld ten opzichte van de y-as, dus $\angle PEF = \angle FED$.

Opmerkingen: Niet echt moeilijk, wel wat werk. (En de algemene stelling klopt ook: $\overrightarrow{EP} = \binom{-4}{p-4}$ en $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{p-2}\binom{-4}{-(p-4)}$.)

16 Neem $M = (4, 2)$, het snijpunt van AC en EF, en de cirkel c om M door D.



Er is één waarde voor p waarvoor c raakt aan OA en BC.

Bepaal die waarde.

Uitwerking: De unieke cirkel heeft straal 2, en dus vergelijking $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. Snijden met de lijn AC: deze heeft vergelijking $x + 2y = 8$. Er komt $(8 - 2y - 4)^2 + (y-2)^2 = 4$ of $5(y-2)^2 = 4$, met oplossing $y = 2 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}$, en $x = 8 - 2(2 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}) = 4 \mp \frac{4}{5}\sqrt{5}$. We moeten $D = (4 + \frac{4}{5}\sqrt{5}, 2 - \frac{2}{5}\sqrt{5})$ hebben. De lijn door P en F heeft vergelijking $x + \frac{4}{p}y = 4$. Daar moet D op liggen. Invullen van D, uitwerken en oplossen geven $p = 2 - 2\sqrt{5}$.

Opmerkingen: Een beetje een gedoe met die $\sqrt{5}$ maar wel leuk om even de tanden in te zetten.

17 We hebben f gegeven door $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$. Gevraagd: de afstand tussen de twee horizontale asymptoten.

Uitwerking: We hebben $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, en $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, dus de afstand is gelijk aan 1.

Opmerkingen: Niet moeilijk.

18 Te bewijzen: een primitieve van f is gegeven door $F(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

Uitwerking: Differentiëren maar:

$$1 - \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = \frac{1}{e^x + 1}$$

Opmerkingen: Flauw.

19 De oppervlakte van het vlak deel omsloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as, en de lijn met vergelijking $x = a$ is voor elke positieve a kleiner dan $\ln 2$.

Uitwerking: Die oppervlakte is gelijk aan

$$\int_0^a f(x)\,dx = \left[x - \ln(e^x + 1)\right]_0^a = \ln 2 - (\ln(e^a + 1) - a)$$

Nu geldt $\ln(e^a + 1) > \ln(e^a) = a$, dus de uitkomst is altijd kleiner dan $\ln 2$.

Opmerkingen: Niet moeilijk.