EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2023-06-23

1 Gegeven

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$$

Te berekenen (exact): de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong.
Uitwerking: Het gaat dus om $f'(0)$. Quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-3) - (x^2-2x)\cdot 1}{(x-3)^2}$$

omdat we $x = 0$ invullen is vereenvoudigen niet echt nodig; $f'(0) = \big((-2)(-3) - 0\big)/(-3)^2 = \frac{2}{3}$.
Opmerkingen: Wel erg veel woorden voor: bereken $f'(0)$.
Hier werk de limietdefinitie overigens makkelijker:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{3}$$

2 De grafiek van f wordt 2 eenheden naar rechts geschoven en b eenheden omhoog en wel zo dat het snijpunt, S, van de asymptoten op de verschoven grafiek komt te liggen. Te berekenen: b.
Uitwerking: De verticale asymptoot heeft $x = 3$ als vergelijking. De scheve zie je door $f(x)$ om te schrijven tot $x + 1 + \frac{3}{x-3}$: de vergelijking is dus $y = x + 1$; en $S = (3, 4)$.
De verschoven functie wordt gegeven door $g(x) = f(x - 2) + b$. De eis is $g(3) = 4$, ofwel $f(1) + b = 4$. We hebben $f(1) = \frac{1}{2}$, dus $b = \frac{7}{2}$.
Opmerkingen: De scheve asymptoot was waarschijnlijk het lastigste onderdeel.

3 Gegeven $f(x) = 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$. Bereken (exact) waar de grafiek van f de verbindingslijn van $(12\pi, 1)$ en $(16\pi, 1)$ snijdt.
Uitwerking: Dus, $f(x) = 1$ oplossen met $12\pi \leqslant x \leqslant 16\pi$. We krijgen $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ met oplossingen $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ en $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ en $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ (met k geheel natuurlijk). In beide gevallen komen we met $k = 6$ en $k = 7$ in het juiste interval, dus $12\frac{1}{2}\pi$, $14\frac{1}{2}\pi$, $13\frac{1}{6}\pi$, en $15\frac{1}{6}\pi$.
Opmerkingen: Beetje rare formulering maar niet moeilijk.

4 Nog een functie, gegeven door $g(x) = 2\cos(x - \frac{3}{4}\pi) + 2$. Elke verticale lijn $x = a$ snijdt de grafieken elk in één punt; voor welke a ligt het midden van die twee punten op de x-as?
Uitwerking: Met andere woorden: los op $f(x) + g(x) = 0$. Numeriek oplossen: $a = 0{,}39$ of $a = 4{,}59$.
Opmerkingen: Gekunstelde formulering.

5 Nog een functie: $h(x) = f(x) + 3\cdot g(x)$. Men kan de grafiek van h uit die van f maken door translaties en één vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as, met een (positieve) factor p. Bereken p, in twee decimalen.
Uitwerking: De factor p is het quotient van de amplitude van h en die van f. De amplitude van f is gelijk aan 2. Die van h krijg je door de functie om te schrijven met behulp van de gegeven gonioformules: $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x$, en $\cos(x - \frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x$. Daarmee vinden we dat

$$h(x) = (1 + 3\sqrt{2})\sin x - (\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\cos x + 6$$

De amplitude van h is dan $\sqrt{(1+3\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2}$ en dat is $\sqrt{40 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{6}}$. Deel dat door 2 om p te krijgen: $p = \frac{1}{2}\sqrt{40 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{6}} \approx 3.97$.
Opmerkingen: Het kan dus exact …; vermoedelijk moesten de extremen met behulp van knoppen drukken gevonden worden.

6 Gegeven de lijn ℓ met vectorvoorstelling $(x, y) = (1, 9) + t(3, -1)$. Verder hebben we punten $A = (-2, 2)$, $B = (2, 2)$ en $C = (\frac{8}{5}, \frac{40}{5})$. Gegeven is dat C de orthogonale projectie van A op ℓ is. Verder is D de orthogonale projectie van A op ℓ.

Gevraagd het getal k zó de $AB : CD$ gelijk is aan $\sqrt{k}$.

Uitwerking: In het bijgeleverde plaatje kun je AB verplaatsen naar een parallel lijnstuk zó dat A samenvalt met C. Dan is de verhouding $CD : AB$ gelijk aan de cosinus van de hoek tussen CD en AB.

En dat is de hoek tussen de vectoren $\binom{1}{1}$ en $\binom{3}{-1}$. Hun inwendig product is gelijk aan 2, hun lengten zijn $\sqrt{2}$ en $\sqrt{10}$. De cosinus van de hoek is dus gelijk aan $2/(\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}) = 1/\sqrt{5}$. De daar zien we dat $k = 5$.
Opmerkingen: Dit was een variant op één van de vele oplossingen uit het voorschrift. Deze is wel het minste werk. De anderen losten allerlei vergelijkingen op om D te vinden.

7 Gegeven $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ en $g(x) = 3(1 - \mathrm{e}^{-x})$, en hun beider grafieken in een plaatje. Te bewijzen dat $x = 0$ en $x = \ln 3$ de enige oplossingen van $f(x) = g(x)$ zijn, door die vergelijking exact op te lossen.
Uitwerking: Herschrijf de vergelijking tot $\mathrm{e}^x - 4 + 3\mathrm{e}^{-x} = 0$. Vermenigvuldig met e^x en los de kwadratische vergelijking $(\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x + 3 = 0$ op; ontbinden: $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 3) = 0$. Dus $\mathrm{e}^x = 1$, met $x = 0$, of $\mathrm{e}^x = 3$, met $x = \ln 3$.
Opmerkingen: Niet moeilijk en voornamelijk een opstapje naar de volgende som.

8 Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van f en g.
Uitwerking: In het plaatje is te zien dat $g(x) > f(x)$ op het open interval $(0, \ln 3)$. De oppervlakte is dus gelijk aan

$$\begin{aligned}\int_9^{\ln 3} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 3} 4 - 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[4x + 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x\right]_0^{\ln 3} \\ &= (4\ln 3 + 1 - 3) - (0 + 3 - 1) \\ &= 4\ln 3 - 4\end{aligned}$$

Opmerkingen: Recht toe recht aan.

9 Gegegeven is dat de grafiek van $f(x)/g(x)$ één perforatie heeft. De coördinaten van die perforatie moeten exact berekend worden.
Uitwerking: Het enige nulpunt van de noemer, $3(1 - \mathrm{e}^{-x})$, is $x = 0$, dus alleen daar zou de perforatie kunnen zitten. Er geldt

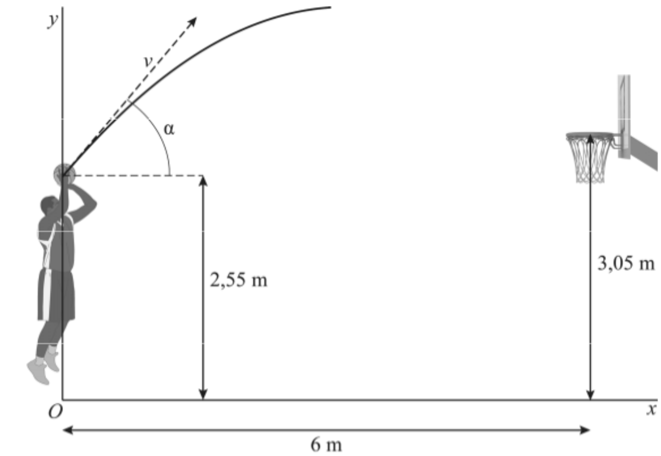
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{3(1 - \mathrm{e}^{-x})} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \cdot \frac{-x}{\mathrm{e}^{-x} - 1} = \frac{1}{3}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

De limiet bestaat dus en de perforatie zit in $(0, \frac{1}{3})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

10 Een verhaaltje over een worp bij basketball leidt tot

$$\begin{cases} x(t) = v \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = v \cdot \sin\alpha \cdot t - 4{,}9t^2 + 2{,}55 \end{cases}$$

als beschrijving van de baan van de bal.



Naast de gegevens in het plaatje nemen we nog $\alpha = 60°$. Gevraagd de beginsnelheid v die zorgt dat de bal bij horizontale afstand 6 m precies hoogte 3,05 m heeft.
Uitwerking: Met $\alpha = 60°$ geldt $x(t) = \frac{1}{2}vt$. We weten dus dat voor het tijdstip dat de bal in de basket valt geldt $\frac{1}{2}vt = 6$. En dus $y(t) = 6\sqrt{3} - 4{,}9t^2 + 2{,}55$. Stellen we $y(t) = 3{,}05$ dan komt er $4{,}9t^2 = 6\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Oplossen: $t \approx 1{,}42$ en via $vt = 12$ komt er $v \approx 12/1{,}42 \approx 8{,}4\,\mathrm{m/s}$.

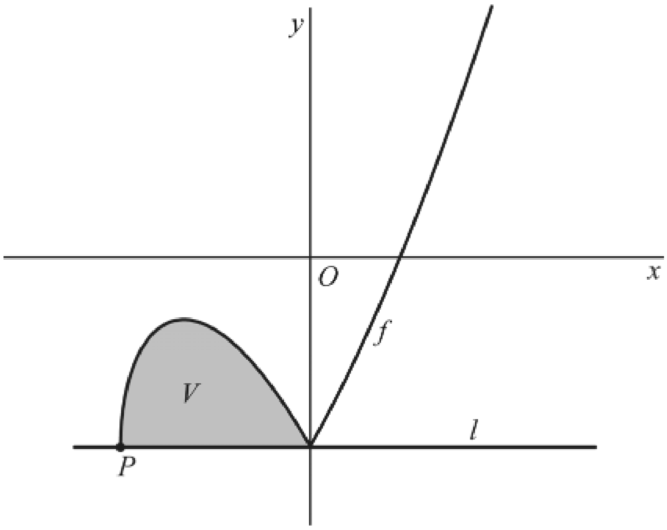
Opmerkingen: Aardig dat eerst alleen vt bekend is.

11 Nu nemen we $v = 8\,\text{m/s}$ en $\alpha = 50°$. Onder welke hoek komt de bal de basket in (in gehele graden)?
Uitwerking: De bal gaat op tijdstip $t_0 = 6/(8\cos 50°)$ door de basket. Verder hebben we $x'(t) = 8\cos 50°$, en $y'(t) = 8\sin 50° - 9{,}8t$. Dan is $y'(t_0)/x'(t_0)$ gelijk aan $-\tan\beta$ (we kijken naar links). Uitrekenen: $y'(t_0)/x'(t_0) \approx -1{,}032$ en dus $\tan\beta \approx 1{,}032$, dat geeft $\beta \approx 45{,}90$, dus $\beta = 46°$ (in hele graden).
Opmerkingen: Invullen en opletten op het minteken; ik zou $\beta = -46°$ ook goed rekenen want de bal gaat naar beneden.

12 We hebben $f(x) = -3 + |x| \cdot \sqrt{x+3}$. In de grafiek is links van de y-as een top te zien. Gevraagd de x-coördinaat van die top.
Uitwerking: We nemen x negatief, dus $|x| = -x$, en $f(x) = -3 - x\sqrt{x+3}$. De afgeleide van f is dan gegeven door $f'(x) = -\frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$, met -2 als enige (negatieve) nulpunt, en dat is dan de gevraagde x-coördinaat.
Opmerkingen: Niet moeilijk; eigenlijk flauw omdat niet nagedacht hoeft te worden.

13 De lijn k gaat door $(-3, -3)$ (het randpunt van de grafiek van f) en de oorsprong, en snijdt de grafiek rechts van de y-as in S. Gevraagd S te bepalen.
Uitwerking: De vergelijking van k is $y = x$. We nemen x positief, dus $|x| = x$. We moeten dus $x = -3 + x\sqrt{x+3}$ oplossen. Dat wordt $x + 3 = x\sqrt{x+3}$, omdat $x > 0$ geldt ook $x + 3 > 0$; we kunnen $\sqrt{x+3}$ wegdelen: $\sqrt{x+3} = x$. Kwadrateren geeft de vergelijking $x^2 - x - 3 = 0$, met potentiële oplossingen $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$, maar $x > 0$, dus $S = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

14 De lijn l, met vergelijking $y = -3$, gaat door het randpunt $(-3, -3)$ en door het punt $(0, -3)$ dat ook op de grafiek ligt.



Het gebiedje V wordt om l gewenteld; gevraagd de inhoud van het wentellichaam.
Uitwerking: Dit komt neer op het wentelen van de grafiek van $f(x) - (-3)$ (met $-3 \leqslant x \leqslant 0$) om de x-as. Antwoord

$$\begin{aligned}\pi \int_{-3}^{0} (-x\sqrt{x+3})^2 \, dx &= \pi \int_{-3}^{0} x^3 + 3x^2 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_{-3}^{0} \\ &= \pi \left(0 - \left(\frac{81}{4} - 27\right)\right) \\ &= \frac{27}{4}\pi\end{aligned}$$

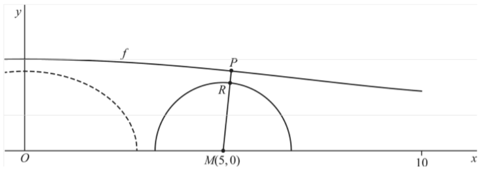
Opmerkingen: Hopelijk niet moeilijk nadat men zich realiseert dat men -3 van $f(x)$ moet aftrekken.

15 Het wegdek van een boogbrug in Amsterdam volgt, vanaf het water gezien, de grafiek van $f(x) = 0{,}00004x^4 - 0{,}012x^2 + 2{,}3$, in meters en $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Het hellingspercentage mag maximaal 12% zijn. We moeten onderzoeken of daar hier aan voldaan is.

Uitwerking: Dus, gevraagd te onderzoeken of overal geldt dat $|f'(x)| \leqslant 0{,}12$. Om te kijken waar f' extremen aanneemt lossen we $f''(x) = 0$ op, dat wordt $0{,}00048x^2 - 0{,}024 = 0$. Vermenigvuldig met 10^5: $48x^2 = 2400$, of $x^2 = 50$, met $x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$. Het tekenschema laat zien dat $f'(x)$ hier lokale extrema heeft. Als we dat invullen in $f'(x) = 0{,}00016x^3 - 0{,}024x$ krijgen we $\pm\frac{2\sqrt{2}}{25} \approx \pm 0{,}1131370850$. Dat is in absolute waarde minder dan 0,12. Verder geldt aan de rand $|f'(-10)| = |f'(10)| = 0{,}08$, dus de randextremen zijn ook klein genoeg.

Opmerkingen: Dat men naar 0,12 moest kijken was al impliciet aangegeven in het examen. Het voorschrift liet tekenschema en randextremen achterwege.

16 In dit plaatje ligt M in $(5, 0)$.



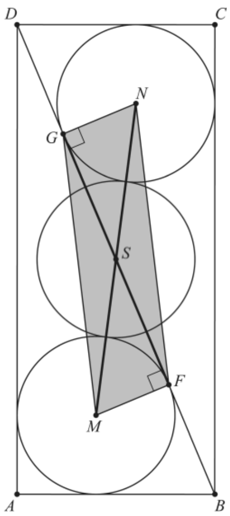
De halve cirkel moet zó gemaakt worden dat de lengte van MP minimaal is en de lengte van PR gelijk aan 30 cm (R is het snijpunt van MP en de halve cirkel.

Gevraagd de straal MR in meters (in twee decimalen).

Uitwerking: De afstand van M tot P is gelijk aan $\sqrt{(p-5)^2 + f(p)^2}$; dat moet geminimaliseerd worden; makkelijker is met $g(p) = (p-5)^2 + f(p)^2$ te werken. Maple heeft voor mij $g'(p) = 0$ opgelost: $p \approx 5{,}205152803$, met $\sqrt{g(p)} \approx 2{,}014711476$; daar moet 30 cm van af, dus $MR \approx 1{,}71$ m.

Opmerkingen: Aan de uitwerking te zien knoppen drukken, nadat de te minimaliseren functie is gevonden. (En g' is een zevendegraads polynoom, dus daar is wat voor te zeggen.)

17 Gegeven de volgende situatie:



De cirkels om M en N raken de rechthoek en de diagonaal BD. De cirkels raken elkaar ook en zijn even groot. Gevraagd de oppervlakte van $MFNG$ te vergelijken (groter, kleiner, gelijk) met die van de cirkels.

Uitwerking: Driehoek MFS (en ook NGS) is rechthoekig, dus $MS^2 = MF^2 + FS^2$. Dat geeft $4r^2 = r^2 + FS^2$, dus $FS = r\sqrt{3}$ en $FG = 2r\sqrt{3}$. Hiermee vinden we dat het parallellogram oppervlakte $r \cdot 2r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}r^2$ heeft. Maar $2\sqrt{3} \approx 3{,}4$ en dat is groter dan π, dus de oppervlakte van het parallellogram is groter dan die van de cirkels (πr^2).

Opmerkingen: Leuke opgave. En: $2\sqrt{3}r^2$ is de oppervlakte van de omgeschreven regelmatige zeshoek om een cirkel met straal r, dus ook daarom is de oppervlakte van het parallellogram groter.