EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2024-05-23

1 Gegeven $f(x) = x^5 - 3x\sqrt{x}$, met de grafiek in een figuur. Te bewijzen dat de grafiek in het punt $(1, -2)$ stijgend is.
Uitwerking: Voor alle zekerheid: $f(1) = -2$, dus dat punt ligt inderdaad op de grafiek. Verder, $f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}$, dus $f'(1) = \frac{1}{2}$. De grafiek is inderdaad stijgend in dat punt.
Opmerkingen: Zou niet moeilijk moeten zijn. Eigenlijk flauw, maar het geeft misschien wat vertrouwen, zo aan het begin. In deze som doet het plaatje er verder niet toe.

2 Nu wordt een horizontaal lijnstuk van lengte $\frac{1}{2}$ aan de grafiek toegevoegd dat twee punten P (links) en Q (rechts) op de grafiek verbindt. Gevraagd de x-coördinaat van P in drie decimalen.
Uitwerking: Als $P = (x, f(x))$ dan $Q = (x + \frac{1}{2}, f(x + \frac{1}{4}))$, dus we zouden $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ kunnen proberen op te lossen. Van die vergelijking is algebraïsch weinig chocola te maken. Maple's `fsolve` gaf mij `0.6827831518`. In de gevraagde drie decimalen is het antwoord dus 0,683.
Opmerkingen: Knoppen drukken dus, niet mijn favoriete soort vraag.

3 Een heel verhaal over wachttijden leidt tot $f(t) = 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ (met $t \geqslant 0$), waarbij dan $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ het percentage wachttijden (in minuten) is in het interval $[a, b]$. Hoeveel procent van de wachttijden ligt tussen de 0 en 3 minuten?
Uitwerking: De integraal uitrekenen dus:

$$\int_0^3 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t = \left[-100\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^3 = 100(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}) \approx 77{,}68698399$$

In één decimaal: 77,7%.
Opmerkingen: Het inleidende verhaal had het telkens over de oppervlakte onder de grafiek die het percentage oplevert. Was dit nou om 'oppervlakte' te vertalen in 'integraal'? Verder niet moeilijk.

4 Als benadering van de gemiddelde wachttijd wordt $\frac{1}{100}\int_0^{20} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ genomen. Dan wordt $(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2})\mathrm{e}^{at}$ als primitieve van $t\mathrm{e}^{at}$ geponeerd (als $a \neq 0$). Te bewijzen: dit klopt.
Uitwerking: Differentiëren:

$$\left(\frac{1}{a} - 0\right)\mathrm{e}^{at} + \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right) \cdot a\mathrm{e}^{at} = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{at} + t\mathrm{e}^{at} - \frac{1}{a}\mathrm{e}^{at} = t\mathrm{e}^{at}$$

Opmerkingen: Niet moeilijk.

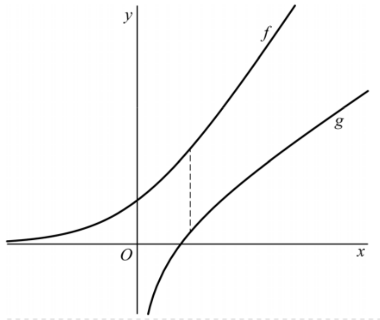
5 En dan nu de gemiddelde wachttijd, in hele minuten, bepalen.
Uitwerking: De integraal berekenen dan maar (met $a = -\frac{1}{2}$ in de formule):

$$\frac{1}{100}\int_0^{20} 50t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[(-2t - 4)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^{20} = 2 - 22\mathrm{e}^{-10} \approx 1{,}999001202$$

In hele minuten is dat 2 minuten.
Opmerkingen: Nu niet moeilijk meer, wel opletten met invullen van a en zo. Het echte gemiddelde, de oneigenlijke integraal $\frac{1}{100}\int_0^{\infty} t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ is gewoon gelijk aan 2.

6 We beginnen met $f(x) = (3x - 7)^2$ en schuiven de grafiek naar rechts en omhoog. We krijgen de grafiek van de functie g. Het punt $(5, 40)$ ligt op de grafiek van g en de helling van de raaklijn is daar gelijk aan -6. Maak een functievoorschrift van g.
Uitwerking: We gaan a naar rechts en b omhoog. Dus $g(x) = f(x - a) + b = (3(x - a) - 7)^2 + b = (3x - (3a + 7))^2 + b$ (met a en b positief). We krijgen twee vergelijkingen voor a en b: $40 = (15 - (3a + 7))^2 + b$ en, via $g'(x) = 6(3x - (3a + 7))$ komt er $-6 = 6(15 - (3a + 7))$. De laatste wordt $8 - 3a = -1$, dus $a = 3$. De eerste wordt dan $40 = (-1)^2 + b$, dus $b = 39$. De vinden $g(x) = (3x - 16)^2 + 39$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

7 Gegeven de functie f door $f(x) = {}^2\log\sqrt{1+8^x}$, met inverse functie g.



In het plaatje de grafieken van f en g en, gestippeld, het korst mogelijke verticale lijnstuk dat de grafieken van f en g verbindt. Gevraagd de lengte van dat lijnstuk.
Uitwerking: Eerst maar het voorschrift van g opstellen en dan $f(x) - g(x)$ minimaliseren.
Dus $x = f(y)$ oplossen naar y. Er geldt $x = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(1 + 8^y)$, dus $2^{2x} = 1 + 8^y$ of $8^y = 4^x - 1$. Dat geeft $3y = {}^2\log(4^x - 1)$ of $y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(4^x - 1)$.
Differentieer

$$f(x) - g(x) = \frac{\ln(1 + 2^{3x})}{2\ln 2} - \frac{\ln(2^{2x} - 1)}{3\ln 2}$$

Er komt

$$\frac{1}{1+2^{3x}} \cdot \frac{3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2}{2\ln 2} - \frac{1}{2^{2x}-1} \cdot \frac{2 \cdot 2^{2x} \cdot \ln 2}{3\ln 2} = \frac{3 \cdot 2^{3x}}{2(1+2^{3x})} - \frac{2 \cdot 2^{2x}}{3(2^{2x}-1)} = \frac{5 \cdot 2^{5x} - 9 \cdot 2^{3x} - 4 \cdot 2^{2x}}{6(1+2^{3x})(2^{2x}-1)}$$

De teller is van de vorm $5u^5 - 9u^3 - 4u^2$ (met $u = 2^x$). Dat is te ontbinden als $u^2(u+1)(5u^2 - 5u - 4)$, dus nulpunten van de teller vinden we als $2^x = 0$, $2^x = -1$, $2^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{105}$, of $2^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{105}$. De eerste drie zijn niet positief, dus alleen $x = {}^2\log(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{105})$ blijft over. Dat invullen in $f - g$ levert, met dank aan Maple, een omvangrijke uitdrukking

$$\frac{-2\ln(2) + 13\ln(3) - 5\ln(5) + 6\ln\left(\sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{7}\right) - 4\ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\sqrt{5}\right)}{12\ln(2)}$$

Maple benadert die met `0.9568329263`; in twee decimalen wordt dat 0,96.
Opmerkingen: Dit is de eerste twee-trapsopgave: eerst de inverse bepalen, en dan wat anders doen. Het echte werk zat volgens het voorschrift in het bepalen van $g(x)$ (drie van de vijf punten), daarna was het knoppen drukken.
Ik kon het niet laten het exacte antwoord op te sporen.

8 Gevraagd te onderzoeken of er een waarde van p is zó dat $f(p+1) - f(p)$ gelijk is aan 3.
Uitwerking: We werken het verschil uit:

$$f(p+1) - f(p) = \frac{1}{2}\left({}^2\log(1 + 8^{p+1}) - {}^2\log(1 + 8^p)\right) = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log\left(\frac{1 + 8^{p+1}}{1 + 8^p}\right)$$

Nu geldt dat

$$\frac{1 + 8^{p+1}}{1 + 8^p} = \frac{8^{p+1} + 8 - 7}{8^p + 1} = 8 - \frac{7}{8^p + 1} < 8$$

En dus

$$f(p+1) - f(p) = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log\left(8 - \frac{7}{8^p + 1}\right) < \frac{3}{2}$$

De vergelijking is dus niet oplosbaar, er is niet zo'n p.
Opmerkingen: De redactie van de vraag in het examen was een stuk wolliger dan wat ik ervan gemaakt heb:

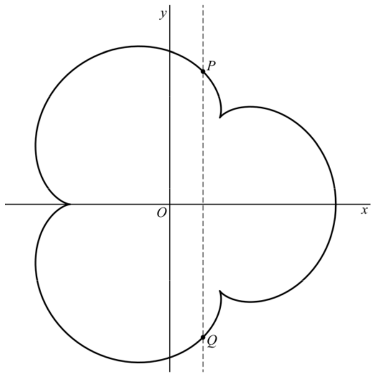
> Op de grafiek van f ligt punt P met x-coördinaat p en punt Q met x-coördinaat $p+1$.
> Voor elke waarde van p kan het verschil $y_Q - y_P$ worden bepaald.
>
> **8** Onderzoek op exacte wijze of er een waarde van p is waarvoor dit verschil gelijk is aan 3.

Wat toetst dat eigenlijk?

9 We krijgen bewegingsvergelijkingen voor een punt P en een punt Q. Voor P:

$$\begin{cases} x_P(t) &= 4\cos(t) + \cos(4t) \\ y_P(t) &= 4\sin(t) + \sin(4t) \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

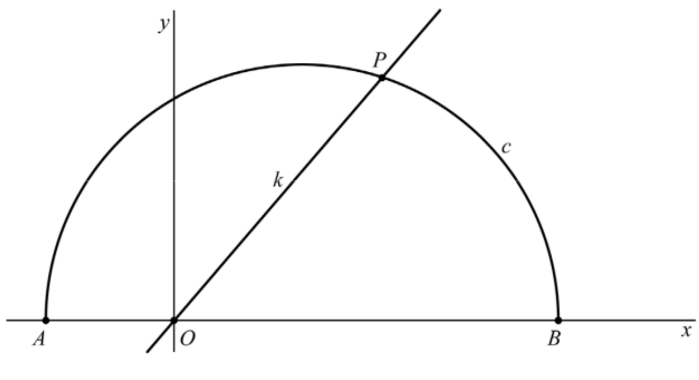
En voor Q hebben we $x_Q(t) = x_P(t+\pi)$ en $y_Q(t) = y_P(t+\pi)$ ("Q loopt π seconden voor op P").



Er zijn twee momenten waaropn P en Q recht boven/onder elkaar liggen. Bepaal voor de situatie in het plaatje de afstand tussen P en Q (exact).
Uitwerking: We moeten $x_P(t) = x_Q(t)$ oplossen dus, ofwel $4\cos(t)+\cos(4t) = 4\cos(t+\pi)+\cos(4t+4\pi)$, maar dat komt neer op $4\cos(t) = -4\cos(t)$, en dus $\cos(t) = 0$. We hebben inderdaad twee tijdstippen: $t_1 = \frac{\pi}{2}$, en $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Op tijdstip t_1 geldt $P = (1,4)$ en $Q = (1,-4)$ als in het plaatje, op tijdstip t_2 zijn P en Q omgewisseld. Hun onderlinge afstand is dus gelijk aan 8.
Opmerkingen: Zou niet moeilijk moeten zijn.

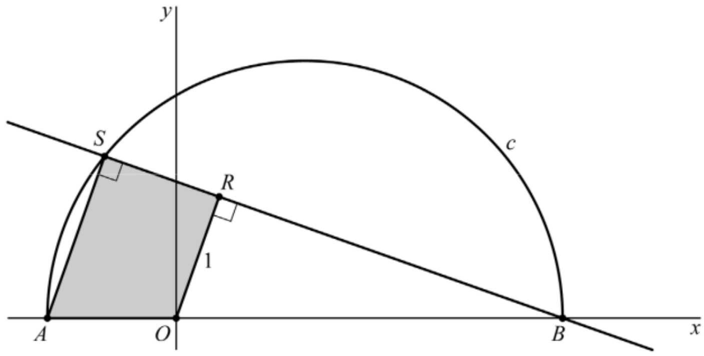
10 Gegeven is dat $P = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3})$ op tijdstip $\frac{2}{3}\pi$. Gevraagd de scherpe hoek tussen de raaklijn aan de baan in dat punt en de x-as, exact in graden.
Uitwerking: Er geldt $x'_P(t) = -4\sin(t) - 4\sin(4t)$ en $y'_P(t) = 4\cos(t) + 4\cos(4t)$. Invullen van $\frac{2}{3}\pi$ levert $x'_P = -4\sqrt{3}$ en $y'_P = -4$; de tangens van de hoek is dus $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en de hoek zelf is gelijk aan 30°.
Opmerkingen: Wel erg voorzichtig om de coördinaten van P mee te geven, en onnodig want voor de helling van de raaklijn heb je alleen de afgeleiden nodig. Verder niet moeilijk.

11 We hebben de cirkel c met middellijn AB, waarbij $A = (-1,0)$ en $B = (3,0)$.



De afstand tussen O (de oorsprong) en P (op c) is gelijk aan $2\frac{1}{2}$. Bereken de x-coördinaat van P (exact).
Uitwerking: Het middelpunt van c is $(1,0)$, en de straal is gelijk aan 2. Dus de coördinaten (x,y) van P voldoen aan $(x-1)^2 + y^2 = 4$ — ofwel $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 4$ — en aan $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$. Vul de tweede in in de eerste: $\frac{25}{4} - 2x + 1 = 4$, met oplossing $x = 1\frac{5}{8}$. (En $y = \frac{1}{8}\sqrt{231}$.)
Opmerkingen: Als je weet wat a en b doen is het niet moeilijk. Eventueel $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ invullen en de vergelijkingen naar a en b oplossen.

12 De punten R en S zijn zó dat $\angle BRO = 90°$ en $OR = 1$, verder ligt S op de cirkel, en ook $\angle BSA = 90°$.



Gevraagd de oppervlakte van het grijze trapezium $ORSA$.
Uitwerking: De driehoeken BRO en BSA zijn gelijkvorming wegens de hoek bij B en de rechte hoeken bij R en S. Pas Pythagoras toe in BRO, er geldt $BR^2 + OR^2 = BO^2$, en dat wordt $BR^2 + 1 = 9$, end dus $BR = 2\sqrt{2}$. Dan gebruiken we $BO : BA = BR : BS$ met $BO = 3$, $BA = 4$, en $BR = 2\sqrt{2}$, dan volgt $BS = \frac{8}{3}\sqrt{2}$. Evenzo volgt $AS = \frac{4}{3}$.
De oppervlakte van BSA is dus $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{9}\sqrt{2}$, en die van BRO is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Van elkaar aftrekken: de gevraagde opppervlakte is gelijk aan $\frac{7}{9}\sqrt{2}$.
Opmerkingen: Aardige opgave.

13 Gegeven f_a door

$$f_a(x) = \frac{ax^2 - 2}{x^2 + a}$$

Te bewijzen: voor geen enkele a heeft de grafiek van f_a een perforatie.
Uitwerking: Als $a > 0$ is de noemer nooit gelijk aan 0, dus dan is f_a op heel $\mathbb{R}$ gedefinieerd. Als $a = 0$ hebben de $f_0(x) = -\frac{2}{x^2}$, die heeft een verticale asymptoot bij $x = 0$, maar is verder overal gedefinieerd. Blijft $a < 0$, dan heeft de noemer twee nulpunten: $\pm\sqrt{-a}$; invullen in de teller levert $-2 - a^2$ en dat is ongelijk aan 0. Nu hebben twee verticale asymptoten en verder is f_a overal gedefinieerd.
Opmerkingen: De uitwerking in het voorschrift zoekt plekken waar teller en noemer gelijk aan 0 zijn. Mijn oplossing staat er niet bij.

14 We bekijken verder alleen positieve a. Met een grote omhaal van worden wordt gevraagd de waarde van a te bepalen waarvoor de afstand van top tot horizontale asymptoot minimaal is.
Uitwerking: Herschrijf $f_a(x)$ een beetje:

$$\frac{ax^2 - 2}{x^2 + a} = \frac{ax^2 + a^2 - a^2 - 2}{x^2 + a} = a - \frac{a^2 + 2}{x^2 + a}$$

Hieraan zie je meteen twee dingen: 1) de horizontale asymptoot ligt op hoogte a, en 2) de top (een globaal minimum) ligt bij $x = 0$, met waarde $-\frac{2}{a}$. De afstand is dus gelijk aan $a - (-\frac{2}{a}) = a + \frac{2}{a}$. En $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geqslant \sqrt{2}$, met gelijkheid als $a = \frac{2}{a}$, dus als $a = \sqrt{2}$. Het minumim is gelijk aan $2\sqrt{2}$, bij $a = \sqrt{2}$.
Opmerkingen: In de omhaal van woorden werd al heel wat weggegeven: de top T ligt op de y-as, dus op hoogte $f_a(0)$; er *is* een horizontale asymptoot en S is het snijpunt daarvan met de y-as, en de afstand ST is afhankelijk van a … en voor alle zekerheid werd de situatie voor $a = 3$ nog in een figuur meegegeven. Al die dingen hadden ook gewoon gevraagd kunnen worden.
En mijn oplossing is met opzet niet volgens de regels.

15 Een verhaaltjessom. UIt de geschiedenis van de sterrenkunde krijgen we de wet van Titius-Bode:

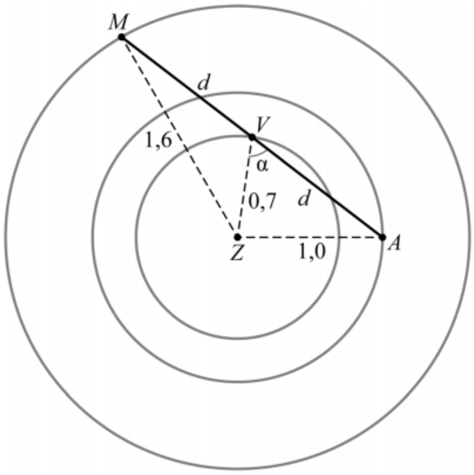
$$a = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-2}$$

Hierin is a de afstand van een planeet tot de zon, in AE (Astronomische Eenheden), en n is het rangnummer van de planeet, geteld vanaf de zon. Volgens deze wet is de afstand van de zon tot Saturnus 10 AE. Welk rangunmmer heeft Saturnus?
Uitwerking: Invullen: $10 = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-2}$, en dat wordt $2^{n-2} = 32$, dus $n = 7$.
Opmerkingen: Schier triviaal rekenwerk. Een beetje rare vraag: na invullen van een geheim nummer is het antwoord 10; bepaal dat nummer. En er zit wat achter: ook al denken wij dat Saturnus de zesde planeet is dacht Bode dat er tussen Mars en Jupiter nog iets moest zitten om de formule kloppend te

maken: "Kan iemand geloven dat de Schepper die plek leeg heeft gelaten?" Zie Wikipedia: "Titius-Bode Law".

16 Een plaatje met daarin de, voor het gemak, cirkelvormige banen van Venus, de Aarde en Mars. Hierin liggen de drie planenet op één lijn met Venus precies halverwege Aarde-Mars.

figuur 1 (afstanden in AE)



Met de grootheden d en α als in het plaatje moet afgeleid worden dat

$$\frac{d^2 - 0{,}51}{\cos\alpha} = \frac{d^2 - 2{,}07}{\cos(180^\circ - \alpha)}$$

Uitwerking: Pas de cosinusregel twee keer toe, in de driehoek AVZ en in MVZ. we krijgen

$$1^2 = d^2 + 0{,}7^2 - 2 \cdot 0{,}7 \cdot d \cdot \cos\alpha \qquad (AVZ)$$

en

$$1{,}6^2 = d^2 + 0{,}7^2 - 2 \cdot 0{,}7 \cdot d \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \qquad (MVZ)$$

Dat geeft

$$2 \cdot 0{,}7 \cdot d \cdot \cos\alpha = d^2 - 0{,}51 \qquad \text{en} \qquad 2 \cdot 0{,}7 \cdot d \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = d^2 - 2{,}07$$

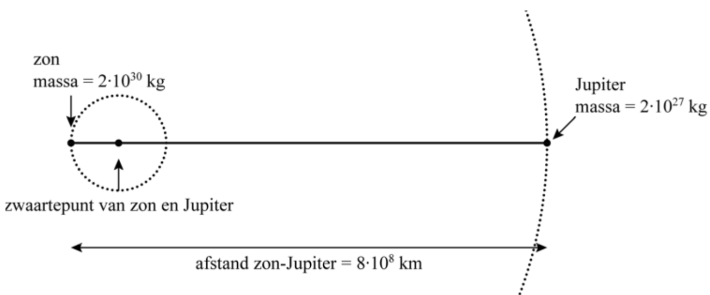
en dus

$$\frac{d^2 - 0{,}51}{\cos\alpha} = 2 \cdot 0{,}7 \cdot d = \frac{d^2 - 2{,}07}{\cos(180^\circ - \alpha)}$$

Opmerkingen: Tsja, daar hebben we die planeten niet voor nodig. Evengoed wel aardig.

17 En nu d bepalen, in AE, en in twee decimalen.
Uitwerking: Omdat $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ volgt uit de gelijkheid dat $d - 0{,}51 = 2{,}07 - d^2$ en dus $d^2 = 1{,}29$. Maple zegt $\sqrt{1{,}29} \approx 1{,}135781669$, in twee decimalen dus $d = 1{,}14\,\text{AE}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

18 Ten slotte een zonnestelsel met alleen de zon en Jupiter:



Het kleine gestippelde cirkeltje is de baan van de zon om het gemeenschappelijke zwaartepunt van de zon en Jupiter. Gevraagd de straal, in honderdduizenden km.

Uitwerking: Gebruik “moment=kracht-maal-arm”. Het moment van de zon is $Z \cdot r$, waarbij Z de massa van de zon is, en r de gevraagde straal. Het moment van Jupiter is $J \cdot (D - r)$, met J de massa van Jupiter en D de gegeven afstand. Nu geldt $Z = 1000J$, dus we krijgen

$$1000J \cdot r = J \cdot (D - r)$$

ofwel $D - r = 1000r$ en $D = 1001r$. We zien dat $r = 8 \times 10^8/1001\,\mathrm{km} \approx 799200{,}7992\,\mathrm{km}$. Dat is dus op een (relatieve) haar na 800.000 km.

Opmerkingen: Kan ook met vectormeetkunde: het zwaartepunt als gewone som van plaatsvectoren. Verder niet moeilijk.