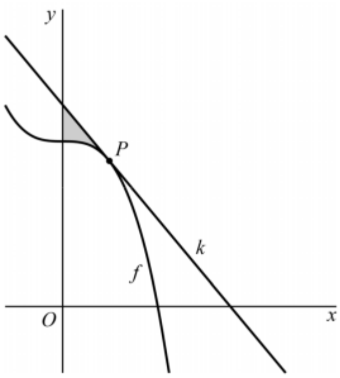
EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2024-06-24

1 Gegeven $f(x) = 72 - x^3$ en $g(x) = x\sqrt{x}$. Een plaatje toont beide grafieken en het snijpunt S. De coördinaten van S moeten exact berekend worden.
Uitwerking: De vergelijking $72 - x^3 = x\sqrt{x}$ oplossen dus. Daar maken we een tweedegraadsvergelijking van: $(x\sqrt{x})^2 + x\sqrt{x} - 72 = 0$, of na ontbinden: $(x\sqrt{x} - 8)(x\sqrt{x} + 9) = 0$. Omdat $x\sqrt{x}$ positief is blijft $y = x\sqrt{x} = 8$ over, met $x = 4$. Dus $S = (4, 8)$.
Opmerkingen: Zou niet moeilijk moeten zijn. Het plaatje doet er verder niet toe.

2 De lijn k, met vergelijking $y = -12x + 88$ raakt de grafiek van f in P.



Gevraagd de oppervlakte van het grijze vlakdeel in het plaatje.
Uitwerking: Eerst P bepalen door $f'(x) = -12$ op te lossen. Er komt $-3x^2 = -12$, dus $x = 2$; inderdaad ligt $(2, 64)$ op k en op de grafiek van f. Nu integreren:

$$\int_0^2 -12x + 88 - (72 - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x\right]_0^2 = 12$$

Opmerkingen: Twee stappen, dat mag ook wel af en toe. Niet echt moeilijk (hoop ik).

3 Over de Cobb-Douglas-productiefunctie/formule. Die luidt

$$Y = A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta$$

Met: Y de productie, L het aantal voltijdbanen, K het kapitaal (het aantal beschikbare machines), en drie parameters A, α, en β.

We nemen $A = 40$, $\alpha = 0{,}7$, en $\beta = 0{,}3$. Een voltijdbaan kost 50 000 Euro, een machine kost 20 000 Euro, beide per jaar.

Er komt een investering van 1 000 000 Euro. Dus $50\,000L + 20\,000K = 1\,000\,000$.

Opdracht: leid af dat nu $Y = 40 \cdot L^{0,7} \cdot (50 - 2{,}5L)^{0,3}$.

Uitwerking: Alles is al gegeven: alleen nog $50\,000L + 20\,000K = 1\,000\,000$ door 10 000 delen, dat komt er $5L + 2K = 100$, ofwel $K = 50 - 2{,}5L$. En dat geeft meteen de formule.
Opmerkingen: Nogal flauw en waarschijnlijk alleen maar om de volgende opgave maakbaar te maken.

4 Bepaal bij hoeveel voltijdbanen de productie maximaal wordt.
Uitwerking: Differentiëren:

$$\begin{aligned} Y' &= 40\big(0{,}7L^{-0,3} \cdot (50 - 2{,}5L)^{0,3} + L^{0,7} \cdot 0{,}3(50 - 2{,}5L)^{-0,7} \cdot -2{,}5\big) \\ &= 40 \cdot L^{-0,3} \cdot (50 - 2{,}5L)^{-0,7} \cdot \left(35 - \frac{35}{20}L - \frac{15}{20}L\right) \end{aligned}$$

Alleen het achterste stuk kan nul worden, dus $35 - \frac{5}{2}L = 0$ oplossen. We vinden $L = 14$.
Opmerkingen: Niet moeilijk, maar misschien wel wat lastig om alles netjes te houden..

5 Aan te tonen: als $\beta = 1 - \alpha$ (een "constant schaalvoordeel") dan zijn inzet van arbeid en kapitaal evenredig met de productie. Expliciet als L en K met een factor g groeien dan groeit Y met diezelfde factor.
Uitwerking: Vul maar in en werk uit:

$$A \cdot (gL)^\alpha \cdot (gK)^\beta = g^{\alpha+\beta} \cdot A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta = gY$$

want $\alpha + \beta = 1$.
Opmerkingen: Te flauw voor woorden dacht ik, maar toch maar mooi 4 punten waard; en wel heel voorzichtige voorbeelduitwerkingen in het voorschrift. Ik zou dit eerder verwachten als een stap waar je, in een groter geheel, niet over na zou moeten denken.

6 Bewegingsvergelijkingen voor een punt P:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos(t - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \qquad \text{met } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

De baan snijdt de positieve y-as in $A = (0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Gevraagd de maximale afstand die P tot A kan aannemen.
Uitwerking: Het gaat er dus om $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + (y(t) - \frac{1}{2}\sqrt{2})^2}$ te maximaliseren. We laten de wortel even weg en maximaliseren $x(t)^2 + (y(t) - \frac{1}{2}\sqrt{2})^2$. Met wat werk, en gebruik makend van $y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos t + \sin t)$, kun je $f(t)$ vereenvoudigen tot $(\cos t + 1)(-\cos t + \sin t - 2)$. Daarna krijgt $f'(t)$ ook een redelijk eenvoudige vorm: $f'(t) = (2\cos t + 1)(\cos t + \sin t - 1)$. Nu is $f'(t) = 0$ oplossen niet moeilijk meer: $2\cos t + 1 = 0$ geeft $t_1 = \frac{2\pi}{3}$ en $t_2 = \frac{4\pi}{3}$. De tweede factor geeft ons in feite $\cos(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, met oplossingen $t_3 = 0$ en $t_4 = \frac{\pi}{2}$. De functiewaarden zijn $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{3}$, en $f(\frac{4\pi}{3}) = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3}$. De laatste is duidelijk de grootste, dus de maximale afstand is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{9 + 3\sqrt{3}}$.
Opmerkingen: De som moest in twee decimalen, en de modeluitwerking kwam neer op: druk op de juiste knoppen. Het kan dus exact, en ons antwoord geeft inderdaad $\approx 1{,}88$, als in het voorschrift.

7 Aan te tonen: als in P de snelheidsvector loodrecht staat op de plaatsvector van P dan geldt $\sin 2t = \sin(2t - \frac{\pi}{2})$,
Uitwerking: We nemen het inwendig product van plaats- en snelheidsvector:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \sin t \cdot \cos t - \cos\Bigl(t - \frac{\pi}{4}\Bigr) \cdot \sin\Bigl(t - \frac{\pi}{4}\Bigr) = \frac{1}{2}\Bigl(\sin 2t - \sin\Bigl(2t - \frac{\pi}{2}\Bigr)\Bigr)$$

(Via de formule $\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$.) Dus, inderdaad, het inwendig product is gelijk aan nul dan en slechts dan als $\sin 2t = \sin(2t - \frac{\pi}{2})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk en bedoeld als opstapje naar de volgende som.

8 Bepaal de vier tijdstippen waarop de plaats- en snelheidsvector orthogonaal zijn.
Uitwerking: Los de vergelijking op. We weten dat $\sin 2t = \sin(2t - \frac{\pi}{2})$ als $2t = 2t - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ of als $2t = \pi - (2t - \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$, met k geheel. Werk beide uit. De eerste levert $0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ en dus geen oplossing. De tweede levert $4t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ofwel $t = \frac{3\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi$ met k geheel. Binnen het interval $[0, 2\pi]$ geeft ons dat vier waarden: $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$, en $\frac{15\pi}{8}$.
Opmerkingen: Een eenvoudige goniosom, hoop ik.

9 We moeten de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ bepalen die voldoet aan: 1) het snijpunt met de y-as is $S = (0, 2)$; 2) de raaklijn aan f in S snijdt de x-as in $(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0)$; en 3) de grafiek is een dalparabool die de positieve x-as raakt.
Uitwerking: 1) Het punt S vertelt ons dat $c = f(0) = 2$. 2) de lijn door S en $(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0)$ heeft helling $-2/(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, dus $b = f'(0) = -\sqrt{3}$. 3) raken aan de x-as betekent dat het nulpunt van f dubbel is, dus de discriminant, $b^2 - 4ac$ is gelijk aan 0, en dus $3 - 8a = 0$. We vinden $a = \frac{3}{8}$.
Opmerkingen: Zou niet moeilijk moeten zijn, misschien de laatste stap.

10 Een geparametriseerd lijnenpaar: voor $a > 0$ hebben we k met vergelijking $y = ax$ en m door het punt $P = (10, 4)$ met richtingscoëfficiënt $-a$. Verder hebben we de functie f, voor $x > 5$ gegeven door $f(x) = \frac{2x}{x-5}$. Aan te tonen dat het snijpunt S van k en m voor elke a op de grafiek van f ligt.

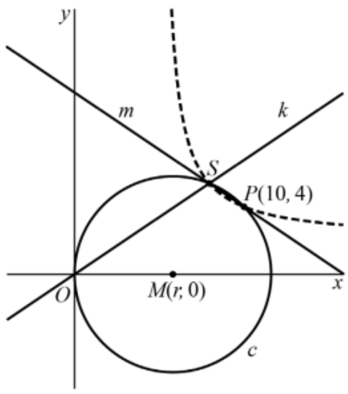
Uitwerking: De vergelijking van m is $y - 4 = -a(x - 10)$, of $y = -ax + (10a + 4)$. Oplossen van $ax = -ax + (10 + 4a)$ naar x levert $x = 5 + \frac{2}{a}$ en $y = 5 + 2a$. Dus $S = (5 + \frac{2}{a}, 5a + 2)$. Nu nagaan dat $5a + 2 = f(5 + \frac{2}{a})$. Invullen geeft

$$\frac{10 + \frac{4}{a}}{5 + \frac{2}{a} - 5} = 5a + 2$$

Dus dat klopt inderdaad.
Opmerkingen: Een rekenopgave. Voorzichtig met de breuken werken.

11 Te bewijzen dat f een dalende functie is.
Uitwerking: Je kunt $f(x)$ herschrijven tot $f(x) = 2 + \frac{10}{x-5}$ en dat is duidelijk een dalende functie.
Opmerkingen: "Bewijs dat de grafiek van f voor elke waarde van $x > 5$ daalt." Dit was de oorspronkelijke formulering; ik heb hem maar als boven geïnterpreteerd.

12 Zolang S en P niet samenvallen gaat door de drie punten O, S, en P een cirkel c.



In het plaatje zien we de situatie van de som: er is één waarde van a waarvoor de cirkel raakt aan de y-as, het middelpunt $M = (r, 0)$ ligt dan op de x-as. Gevraagd de waarde van a waarvoor dit optreedt (in twee decimalen).
Uitwerking: Om te beginnen: de straal van de cirkel is r (de afstand van O tot M). Dus moet ook de afstand MP gelijk zijn aan r. We krijgen $r = \sqrt{(r-10)^2 + 4^2}$, of $r^2 = r^2 - 20r + 116$, met oplossing $r = \frac{29}{5}$. Voorts moeten de coördinaten van S voldoen aan $x^2 + y^2 - 2rx = 0$. Vul in: $(\frac{5a+2}{a})^2 + (5a+2)^2 - 2r\frac{5a+2}{a} = 0$. Haal $5a + 2$ buiten de haakjes: $(5a+2)(\frac{5a+2}{a^2} + 5a + 2 - \frac{2r}{a}) = 0$, en breng alles onder één noemer:

$$(5a + 2) \cdot \frac{5a + 2 + 5a^3 + 2a^2 - 2ra}{a^2} = 0$$

Dat levert een derdegraadsvergelijking in a: $5a^3 + 2a^2 + (5 - 2r)a + 2 = 0$. Maple levert drie oplossingen: -1.477032961, 0.4000000000, en 0.6770329614. De eerste is negatief en valt dus af. De tweede geeft $y = \frac{2}{5}x$ als vergelijking voor k, en dus $S = P$. De derde geeft $S = (7.95, 5.39)$ en die is ongelijk aan P. We vinden dus $a \approx 0{,}68$.
Opmerkingen: Aardige opgave met een paar stappen achter elkaar.

13 Een familie functies: $f_a(x) = \left|{}^2\log(x^2 - ax + 69)\right|$ met $a > 0$ als parameter. Eerst nemen we $a = 18$ en lossen de vergelijking $f_{18}(x) = 2$ op (er is gegeven dat er vier oplossingen zijn).
Uitwerking: Dat levert twee vergelijkingen: ${}^2\log(x^2 - 18x + 69) = 2$ en ${}^2\log(x^2 - 18x + 69) = -2$, ofwel $x^2 - 18x + 69 = 4$ en $x^2 - 18x + 69 = \frac{1}{4}$. Beide leveren na kwadraat afsplitsen iets moois: $(x-9)^2 = 16$ en $(x-9)^2 = \frac{49}{4}$. De oplossingen zijn dus: $x = 5$, $x = 13$, $x = \frac{25}{2}$, en $x = \frac{11}{2}$.
Opmerkingen: Als je de definities kent niet moeilijk. De oorspronkelijke formulering vond ik wat omslachtig: "de grafiek van f_{18} snijdt de lijn met vergelijking $y = 2$ in vier punten. Bereken exact de x-coördinaten van deze punten."

14 Gevraagd de waarde a te bepalen waarvoor de grafiek van f_a twee verticale asymptoten heeft die 20 eenheden uit elkaar liggen.
Uitwerking: Die asymptoten vinden we daar waar $x^2 - ax + 69 = 0$. De top van die parabool ligt bij $x = \frac{a}{2}$ en de nulpunten liggen symmetrisch ten opzichte van $\frac{a}{2}$. We moeten a dus zo bepalen dat $\frac{a}{2} + 10$

en $\frac{a}{2} - 10$ oplossingen zijn van $x^2 - ax + 69 = 0$. Vul in: $(\frac{a}{2} - 10)^2 - a(\frac{a}{2} - 10) + 69 = -\frac{a^2}{4} + 169$ ($\frac{a}{2} + 10$ invullen levert hetzelfde resultaat). Dus oplossen $\frac{a^2}{4} = 169$, ofwel $a = 2 \cdot 13 = 26$ (a is positief).
Opmerkingen: Wel aardig.

15 Weer een parameter: $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$, en $a > 0$. Het snijpunt van de grafiek van f_a met de lijn $y = \mathrm{e}$ is S. Voor elke a gaat de raaklijn in S aan de grafek van f door de oorsprong.
Uitwerking: Uit het hoofd: $S = (\frac{1}{a}, \mathrm{e})$. De lijn door O en S heeft richtingscoëfficiënt $a\mathrm{e}$, evenals de raaklijn want $f'(\frac{1}{a}) = a \cdot \mathrm{e}^{a \cdot \frac{1}{a}} = a\mathrm{e}$.
Opmerkingen: Makkie.

16 Drie punten op de grafiek van f_a: $A = (0, 1)$, $B = (1, \mathrm{e}^a)$, en $C = (2, \mathrm{e}^2)$. Hun spiegelpunten ten opzichte van de lijn $y = x$ zijn respectievelijk D, E, en F. Bepaal a zó dat $AD + BE = CF$.
Uitwerking: De afstanden zijn eenvoudig te bepalen. $AD = \sqrt{2}$, $BE = \sqrt{(1 - \mathrm{e}^a)^2 + (\mathrm{e}^a - 1)^2} = \sqrt{2}(\mathrm{e}^a - 1)$, en evenzo $CF = \sqrt{2}(\mathrm{e}^{2a} - 2)$. Weglaten van de gemeenschappelijke factor $\sqrt{2}$ levert de vergelijking $1 + (\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^{2a} - 2$, een kwadratische vergelijking in e^a, te ontbinden als $(\mathrm{e}^a - 2)(\mathrm{e}^a + 1) = 0$. De enige oplossing is $\mathrm{e}^a = 2$, met $a = \ln 2$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

17 Gegeven $P = (9, 27)$, en $Q = (a, b)$. Er geldt dat $OQ = 5\sqrt{5}$. Bepaal de mogelijke punten Q waarvoor de plaatsvectoren van P en Q een hoek van $45°$.
Uitwerking: Het inwendig product van de plaatsvectoren is enerszijds gelijk aan $9a + 27b$, en anderszijds aan $9\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (want $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$). We krijgen $9a + 27b = 225$ ofwel $a + 3b = 25$, en nog steeds $a^2 + b^2 = 125$. Stop $a = 25 - 3b$ in $a^2 + b^2 = 125$, er komt $(25 - 3b)^2 + b^2 = 125$. Dat wordt $10b^2 - 150b + 500 = 0$, of $b^2 - 15b + 50 = 0$, en dus $(b - 5)(b - 10) = 0$. De punten die we vinden zijn $(-5, 10)$ en $(10, 5)$.
Opmerkingen: Goede oefening in inwendig producten. Verder een eenvoudige kwadratische vergelijking.