

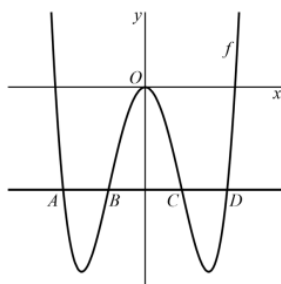
EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2025-05-14

- 1 Gegeven $f(x) = x^4 - 30x^2$, de grafiek van f heeft twee buigpunten met dezelfde y -coördinaat. Te bewijzen: die y -coördinaat is gelijk aan -125 .

Uitwerking: De functie is een polynoom, dus we zoeken punten waar de tweede afgeleide gelijk is aan 0. Welnu $f'(x) = 4x^3 - 60x$ en $f''(x) = 12x^2 - 60$. De nulpunten van f'' zijn $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$, en f'' wisselt in die punten van teken; dus f' heeft in beide punten een extreem en f zelf dus een buigpunt. Ten slotte: $f(\pm\sqrt{5}) = 25 - 30 \cdot 5 = -125$.

Opmerkingen: Zou niet moeilijk moeten zijn, want er is al gegeven dat er twee buigpunten zijn. Kijken waar $f''(x) = 0$ volstaat daarom volgens het voorschrift. Het controleren dat de gevonden punten daadwerkelijk buigpunten zijn levert dus geen punten op. Ik ben geen fan van dit soort sturende vragen.

- 2 De lijn door de buigpunten ($y = -125$) snijdt de grafiek in nog twee punten A en D :



Gevraagd de lengte van AD (exact).

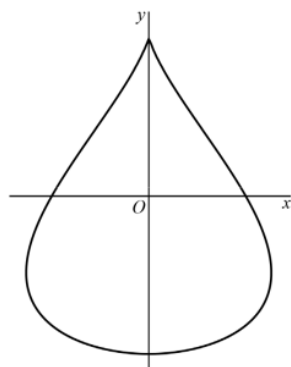
Uitwerking: Los op $f(x) = -125$, ofwel $x^4 - 30x^2 + 125 = 0$. Kwadraat afsplitsen: $(x^2 - 15)^2 - 100 = 0$, dus $x^2 = 15 \pm 10$. Het geval $x^2 = 5$ geeft de buigpunten; het geval $x^2 = 25$ geeft $A = (-5, -125)$ en $D = (5, -125)$, met onderlinge afstand 10.

Opmerkingen: Kwadratische vergelijking oplossen, meer niet.

- 3 Gegeven een kromme K met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \cdot (\cos(t) - 1) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

en een plaatje



Gevraagd de coördinaten van de drie punten waar de raaklijn aan de kromme verticaal loopt (exact).

Uitwerking: Verticale raaklijn betekent dat afgeleide van de x -coördinaat gelijk aan 0 is: $x(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) - \sin(t)$, dus $x'(t) = \cos(2t) - \cos(t) = 2\cos^2(t) - \cos(t) - 1 = (2\cos(t) + 1)(\cos(t) - 1)$. We krijgen $\cos(t) = -\frac{1}{2}$, met $t_1 = \frac{2\pi}{3}$ en $t_2 = \frac{4\pi}{3}$; en verder $\cos(t) = 1$, met $t_3 = 0$, en $t_4 = 2\pi$. We krijgen dus $(-\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ bij t_1 , en $(\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ bij t_2 . De waarden t_3 en t_4 zijn de eindpunten van het interval en geven het punt $(0, 1)$. Echter: de linker- en rechterafgeleiden van x zijn daar gelijk aan 0, maar die van y ook; het is dus niet meteen duidelijk dat de raaklijn in $(0, 1)$ (zo die er is) verticaal loopt. Maar omdat er drie punten aangekondigd zijn zal dat wel zo zijn.

Opmerkingen: Weer een opgave waar we de opstellers, in navolging van het voorschrift, moeten geloven dat het goed zit in $(0, 1)$. Overigens is de raaklijn inderdaad verticaal: als we naar het quotiënt $(1 - y(t))/(0 - x(t))$ kijken zien we $-1/\sin(t)$ en die heeft limiet $\pm\infty$ voor t naar 0 of 2π .

- 4 Bewijs dat $x^2 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$ een vergelijking van de kromme is.

Uitwerking: Invullen: $x^2 = \sin^2(t)(\cos(t) - 1)^2 = (1 + \cos(t))(1 - \cos(t))^3 = (1 + y)(1 - y)^3$. De tweede factor wordt $1 - 3y + 3y^2 - y^3$, vermenigvuldigen met $1 + y$ levert dan $1 - 3y + 3y^2 - y^3 + y - 3y^2 + 3y^3 - y^4 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$.

Opmerkingen: Niet moeilijk; netjes invullen en uitwerken.

- 5 Wentel K om de y -as en bereken de inhoud van het ingesloten wentellichaam (exact).

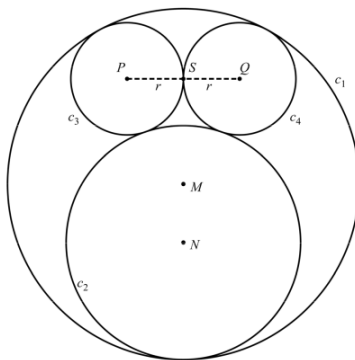
Uitwerking: Omdat $y = \cos(t)$ loopt y van -1 tot 1 ; als we x als functie van y beschouwen komt er, via de vorige opgave, de volgende integraal

$$\pi \int_{-1}^1 -y^4 + 2y^3 - 2y + 1 \, dy$$

Met waarde $\pi[-\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{4}y^4 - y^2 + y]_{-1}^1 = \frac{8}{5}\pi$

Opmerkingen: Een standaardintegraal.

- 6 Vier cirkels in één figuur



De grote cirkel is c_1 , met middelpunt M en straal 3. De cirkels c_2 , c_3 , en c_4 raken c_1 . Verder: c_2 heeft middelpunt N en straal 2; c_3 en c_4 hebben middelpunt respectievelijk P en Q , en beide hebben straal r . Ten slotte: c_3 en c_4 raken elkaar in S , en beide raken ook c_2 .

Te bewijzen: $MS = \sqrt{9 - 6r}$.

Uitwerking: Pythagoras: $MS^2 = MQ^2 - QS^2 = (3 - r)^2 - r^2 = 9 - 6r$. De lijn door M en Q snijdt c_1 loodrecht; de lijn door Q en het raakpunt van c_4 en c_1 snijdt c_4 loodrecht, en snijdt dus ook c_1 loodrecht. De twee lijnen zijn gelijk en dus inderdaad $MQ = 3 - r$.

Opmerkingen: Zodra je $MQ = 3 - r$ hebt is het klaar, met dank aan Pythagoras. Het voorschrift vertelt niet hoe die gelijkheid aangetoond moet worden.

- 7 Er wordt nog gegeven dat $MN = 1$. Nu moet de waarde van r exact berekend worden.

Uitwerking: We kunnen NS op twee manieren in r uitdrukken: $NS = 1 + MS = 1 + \sqrt{9 - 6r}$. Verder geldt ook $NS^2 = NQ^2 - QS^2 = (2 + r)^2 - r^2 = 4 + 4r$, dus $NS = 2\sqrt{r + 1}$. Dus $2\sqrt{r + 1} = 1 + \sqrt{9 - 6r}$ oplossen. Links en rechts kwadrateren geeft $4r + 4 = 10 - 6r + 2\sqrt{9 - 6r}$ of $5r - 3 = \sqrt{9 - 6r}$. Nog een keer kwadrateren: $25r^2 - 30r + 9 = 9 - 6r$, en dus $25r^2 - 24r = 0$. Dat geeft $r = 0$ (valt af) of $r = \frac{24}{25}$.

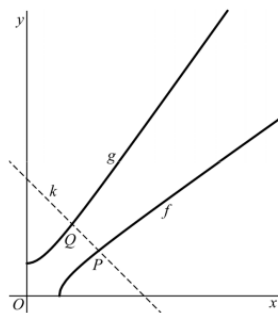
Opmerkingen: Zodra je $NQ = 2 + r$ hebt moet je zorgvuldig werken, maar het is niet moeilijk. Ik neem aan dat “de middelpunten van twee rakende cirkels hebben de som van de stralen als afstand” het gewenste argument voor $NQ = 2 + r$ is.

- 8 Gegeven twee functies f en g (voor $x \geq 0$) door $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ en $g(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$, waarvan wordt gezegd dat ze elkaars inverse zijn. Dit moet bewezen worden.

Uitwerking: Er geldt $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = x$, en $g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 2 + 2} = \sqrt{x^2} = x$, want $x \geq 0$.

Opmerkingen: Het voorschrift doet, foutief, maar één van de gelijkheden, het ‘of’ in “ $g(f(x)) = x$ (of $f(g(x)) = x$)” is misplaatst. Er zou opgemerkt moeten worden dat één gelijkheid voldoet omdat de domeinen goed gekozen zijn. Verder niet moeilijk.

- 9 Voor $a \geq \sqrt{2}$ snijdt de lijn k met vergelijking $y = -x + a$ de grafieken van f en g in respectievelijk P en Q :

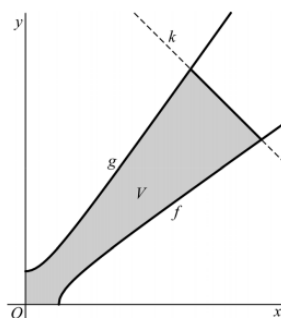


De formule voor de lengte van PQ in termen van a wordt gegeven: $3a\sqrt{2} - 4\sqrt{a^2 - 1}$. Bereken exact de a waarvoor deze lengte minimaal is.

Uitwerking: Differentiëren en afgeleide nul stellen: $3\sqrt{2} - 4a(a^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = 0$ of $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 - 1} = 4a$. Kwadrateren: $18a^2 - 18 = 16a^2$, dus $a^2 = 9$. Dat geeft $a = 3$ (want $2 \geq \sqrt{2}$).

Opmerkingen: Zou niet moeilijk moeten zijn want alles is al gegeven. Gemiste kans: je zou dit open kunnen laten. De minimum lengte treedt op als k beide grafieken loodrecht snijdt; dus in P geldt $f'(x) = 1$ en in Q hebben we $g'(x) = 1$. Dat maakt het interessanter.

- 10 Nu nemen we $a = 17$ en krijgen als extra info dat k de grafiek van f in $(10, 7)$ snijdt.



De vraag is de oppervlakte van het grijze vlakdeel V , ingesloten door de grafieken van f en g , de lijn k , en de beide assen, te berekenen (in twee decimalen).

Uitwerking: Met wat knipwerk kan met de oppervlakte op de volgende manier uitrekenen:

$$\int_0^7 g(x) \, dx + \int_7^{10} (17 - x) \, dx - \int_{\sqrt{2}}^{10} f(x) \, dx$$

De eerste twee geven samen de oppervlakte, boven de x -as, en onder de grafiek van g tussen 0 en 7 en onder de lijn $y = 17 - x$ tussen 7 en 10. De derde geeft de oppervlakte, boven de x -as, onder de grafiek van f tussen $\sqrt{2}$ en 10. Met behulp van Maple: het exacte antwoord is $\frac{51}{2} + \sqrt{2} \ln(5\sqrt{2} + 7)$ en dat is ongeveer 29,23935144, op twee decimalen 29,24 dus.

Opmerkingen: Er zijn meer knipstrategieën (het voorschrift had er in totaal drie). Daarna is het knoppen drukken.

- 11 Een uitleg van een experiment met een blokje aan een veer, hangend aan een plafond van hoogte 350 cm. De hoogte van het zwaartepunt van het blokje als functie van de tijd is gemodelleerd met $Z_b(t) = 150 - 100 \cos(4t)$. Het zwaartepunt van de veer ligt altijd in het midden van de veer.

Aan te tonen: de hoogte van het zwaartepunt van de veer heeft amplitude van 50 cm en de evenwichtsstand ligt op hoogte 250 cm

Uitwerking: De hoogte van de veer wordt gegeven door $Z_v = \frac{1}{2}(350 + Z_b(t))$; het ligt namelijk halverwege plafond en blokje. We krijgen $\frac{1}{2}(350 + 150 - 100 \cos(4t)) = 250 - 50 \cos(4t)$. Daaruit lees je de gewenste getallen af.

Opmerkingen: Niet moeilijk zou ik zeggen.

- 12** Gevraagd de hoogten, in het tijdsinterval tussen loslaten (laagste punt) en bereiken van het hoogste punt, waarop het blokje een snelheid heeft van 255 cm/sec.

Uitwerking: Differentiëren: $Z'_b(t) = 400 \sin(4t)$. En dan oplossen $\sin(4t) = 255/400 = 51/80$, in het interval $(0, \frac{\pi}{4})$. We krijgen $t_1 = \arcsin(51/80)/4$ en $t_2 = (\pi - \arcsin(51/80))/4$. De hoogten zijn $h_1 = 150 - 100 \cos(4t_1) = 150 - 100 \sqrt{1 - (\frac{51}{80})^2}$ en $h_2 = 150 - 100 \cos(4t_2) = 150 + 100 \sqrt{1 - (\frac{51}{80})^2}$. Afgerond op hele centimeters: $h_1 = 73$ cm en $h_2 = 227$ cm.

Opmerkingen: De tijdstippen waren niet belangrijk, wel het feit dat ze symmetrisch in het interval $(0, \frac{\pi}{4})$ liggen. Wel aardig.

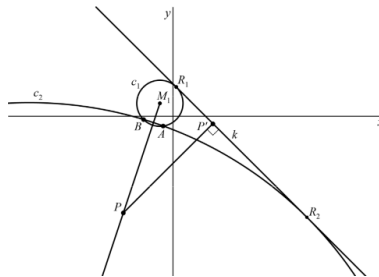
- 13** Nu krijgen we extra gegeven dat de massa's van veer en blokje respectievelijk 600 gr en 1000 gr zijn. Gevraagd wordt de formule voor de hoogte $Z_T(t)$ van het gezamenlijke zwaartepunt op te stellen.

Uitwerking: We krijgen een gewogen gemiddelde van Z_b en Z_v : de gewichten zijn $\frac{1000}{1600} = \frac{5}{8}$ en $\frac{600}{1000} = \frac{3}{8}$. We krijgen

$$Z_T(t) = \frac{5}{8}Z_b(t) + \frac{3}{8}Z_v(t) = 187,5 + 81,25 \cdot \cos(4t)$$

Opmerkingen: Eigenlijk flauw, tenzij je niet (meer) weet dat er een gewogen gemiddelde in het spel is.

- 14** Gegeven twee punten $A = (-6, -6)$ en $B = (-18, -2)$, en lijn k met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Verder zijn er cirkels c_1 en c_2 zó dat A en B op beide liggen, en beide aan de lijn k raken. Cirkel c_i heeft middelpunt M_i en raakt k in R_i ($i = 1, 2$).



Voor P op de middelloodlijn van A en B geldt $P = (p, 3p + 32)$; de loodrechte projectie van P op k is P' . Dan $P' = (-p - 6, p + 26)$. Bewijs dit.

Uitwerking: De lijn door P loodrecht op k heeft vergelijking $y = x + 2p + 32$. Vul hier de vectorvoorstelling van k in: $20 - t = t + 2p + 32$, dat geeft $t = -p - 6$. Dat weer in k invullen: $x = -p - 6$ en $y = 20 - (-p - 6) = 26 + p$, als gevraagd.

Opmerkingen: Dat is wel een grote aanloop voor niet meer dan het snijden van twee lijnen. De volgende som gebruikt wat meer van al die gegevens.

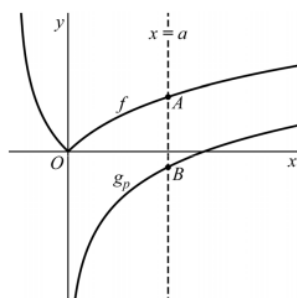
- 15** We moeten de coördinaten van M_1 en M_2 exact benaderen. Hierbij is een hint gegeven: $M_1M'_1$ is gelijk aan de straal van de kleine cirkel en dus ook aan AM_1 en M_2 ; en analoog voor M_2 .

Uitwerking: De afstand van M_i tot M'_i is gelijk aan $\sqrt{(2p+6)^2 + (2p+6)^2} = \sqrt{2(2p+6)^2}$. De afstand van M_i tot A (en ook tot B) is gelijk aan $\sqrt{(p+6)^2 + (3p+38)^2}$ (of $\sqrt{(p+18)^2 + (3p+34)^2}$). En beide zijn gelijk aan $\sqrt{10p^2 + 240p + 1480}$.

Dus, oplossen $2(2p+6)^2 = 10p^2 + 240p + 1480$; na omwerken vereenvoudigen en kwadraat afsplitsen komt er $(p+48)^2 = 1600$. Dus $p+48 = 40$ en $p = -8$, of $p+48 = -40$ en $p = -88$. Invullen in P geeft ons $M_1 = (-8, 8)$ (want in het derde kwadrant volgens het plaatje) en $M_2 = (-88, -232)$ (ergens in het vierde kwadrant).

Opmerkingen: Een klein beetje moeite, maar niet al te veel. Het voorschrift geeft de punten maar niet wie wie is ...

- 16 Gegeven een functie f door $f(x) = |\ln(x+1)|$, en functies g_p voor $0 < p \leq 1$ gegeven door $g_p(x) = \ln(px)$.



De punten A en B zijn de snijpunten van de lijn $x = a$ met de grafieken van f en g_p (NB $a > 0$). Voor $p = 1$ is er een a zó dat $OB = OA + 2$. Bepaal die a (in twee decimalen).

Uitwerking: De afstand OA is gelijk aan $\sqrt{a^2 + \ln^2(a+1)}$, en $OB = \sqrt{a^2 + \ln^2 a}$. Op te lossen is dus

$$\sqrt{a^2 + \ln^2(a+1)} + 2 = \sqrt{a^2 + \ln^2 a}$$

De weg van de minste weerstand: Maple's `fsolve` geeft $a = 0,1157572115 \approx 1,12$.

Opmerkingen: Waarom moet dit via snijpunten van lijnen en grafieken? Waarom niet gewoon $A = (a, f(a))$ en $B = (a, g_p(a))$? En wat toetst dit anders dan op de juiste knoppen drukken?

- 17 Er is een p waarvoor geldt dat AB tot 1 nadert als a onbeperkt toeneemt.

Uitwerking: Met andere woorden bepaal p zó dat

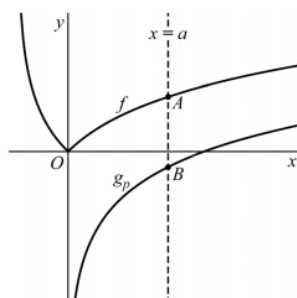
$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) - g_p(a) = 1$$

Nu is $f(a) - g_p(a)$ gelijk aan $\ln(a+1) - \ln(a) - \ln(p)$, en er geldt $\lim_{a \rightarrow \infty} \ln(a+1) - \ln(a) = 0$, dus moet $-\ln(p)$ gelijk zijn aan 1, en dus $p = e^{-1}$. NB

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \ln(a+1) - \ln(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = \ln(1) = 0$$

Opmerkingen: Ik vroeg me af hoe de limiet berekend zou moeten worden; via een standaardlimiet dus. Dan is de som verder niet moeilijk meer.

- 18 Nu komen er negatieve x -en in het spel, en de absolute waarde in de definitie van f : we krijgen functies h_q , gegeven door $h_q(x) = \frac{1}{2} \ln(-x) + q$



Voor welke q raakt de grafiek van h_q de grafiek van f (links van de y -as)?

Uitwerking: Bij raken moeten we een x hebben zó dat $f(x) = h_q(x)$ en $f'(x) = h'_q(x)$. Om te beginnen met de tweede vergelijking: omdat voor $x < 0$ geldt dat $f(x) = -\ln(x+1)$ wordt deze $-\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2x}$, of $-2x = x+1$, met oplossing $x = -\frac{1}{3}$. Dus q moet voldoen aan $-\ln(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{3}) + q$, en dus $q = \frac{3}{2} \ln(3) - \ln(2) \approx 0,9547712534$

Opmerkingen: Waarom kan dat niet gewoon exact? Verder niet moeilijk.