

EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2025-06-19

- 1 Twee punten P en Q bewegen voor $t \geq 0$ volgens

$$\begin{cases} x_P(t) = 8t^2 \\ y_P(t) = 4 - 4t^2 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_Q(t) = 1 + 3t \\ y_Q(t) = 4t \end{cases}$$

met t de tijd. Er is een tijdstip waarop P onder en Q boven de x -as liggen en gelijke afstand tot de x -as hebben. Bepaal exact de y -coördinaat van P op dat tijdstip.

Uitwerking: Op het gegeven moment geldt $y_Q(t) + y_P(t) = 0$, dus we krijgen $4t + 4 - 4t^2 = 0$ op te lossen. Dat komt neer op $t^2 - t - 1 = 0$, of $(t - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$. De oplossing is $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, want $t \geq 0$. Dat krijgen we $y_Q(t) = 2 + 2\sqrt{5}$, en $y_P(t) = -2 - 2\sqrt{5}$.

Opmerkingen: Een omslachtige manier om een kwadratische vergelijking op te laten lossen.

- 2 Te bewijzen: op tijdstip $t = \sqrt{5}$ is de snelheid van P inderdaad acht keer zo groot als die van Q .

Uitwerking: De snelheidsvector van Q is constant, $v_Q(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, met lengte 5. Die van P is variabel, $v_P(t) = \begin{pmatrix} 16t \\ -8t \end{pmatrix} = 8t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, met lengte $8t\sqrt{5}$. Op tijdstip $\sqrt{5}$ is die lengte gelijk aan $8 \cdot 5$ en dat is acht keer de lengte van $v_Q(t)$.

Opmerkingen: Het ‘inderdaad’ in de opgave is er omdat vóór de opgave het te bewijzene al uitgesproken werd. Ik vraag me af waarom die herhaling nodig is. Verder niet moeilijk, denk ik.

- 3 Gevraagd de coördinaten van P exact te bepalen als de helling van het lijnstuk PQ gelijk is aan $\frac{4}{3}$.

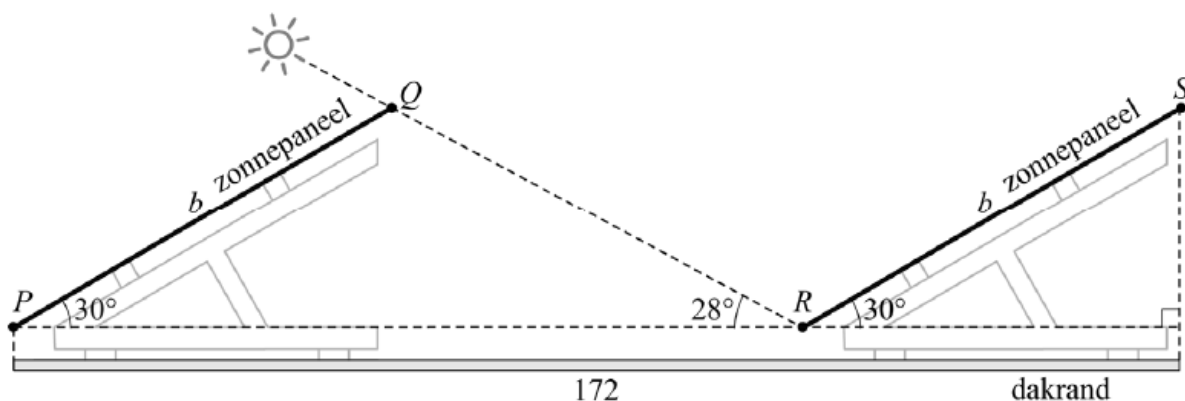
Uitwerking: De helling van PQ is

$$\frac{y_Q(t) - y_P(t)}{x_Q(t) - x_P(t)} = \frac{4t - 4 + 4t^2}{1 + 3t - 8t^2}$$

Als we dat gelijk stellen aan $\frac{4}{3}$ en kruislings vermenigvuldigen komt er $12t - 12 + 12t^2 = 4 + 12t - 32t^2$. Dit kunnen we terugbrengen tot $44t^2 = 16$ of $11t^2 = 4$, en dus $t^2 = \frac{4}{11}$. Invullen bij P geeft de coördinaten $(\frac{32}{11}, \frac{28}{11})$.

Opmerkingen: De opgave ging vergezeld van een onnodige grafiek met het lijnstuk ingetekend voor $t = \frac{1}{2}$ en $t = \frac{3}{2}$. Niet moeilijk dankzij de goedgekozen helling.

- 4 Een som over zonnepanelen met daarbij de volgende figuur.



De dakrand is 172 cm lang, en te berekenen is b , algebraïsch in gehele centimeters

Uitwerking: Projecteer Q en S loodrecht op het dak, dat geeft de punten Q' en S' . Dan geldt $172 = PQ' + Q'R + RS'$. Verder hebben we $PQ' = RS' = b \cdot \cos 30^\circ = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, en dus, alvast, $172 = b\sqrt{3} + Q'R$. Verder geldt $QQ' = Q'R \cdot \tan 28^\circ$ en $QQ' = b \sin 30^\circ = \frac{1}{2}b$, met als gevolg dat $Q'R = b/(2 \tan 28^\circ)$. Alles bij elkaar:

$$172 = b \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2 \tan 28^\circ} \right) = b \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \tan 28^\circ + 1}{2 \tan 28^\circ}$$

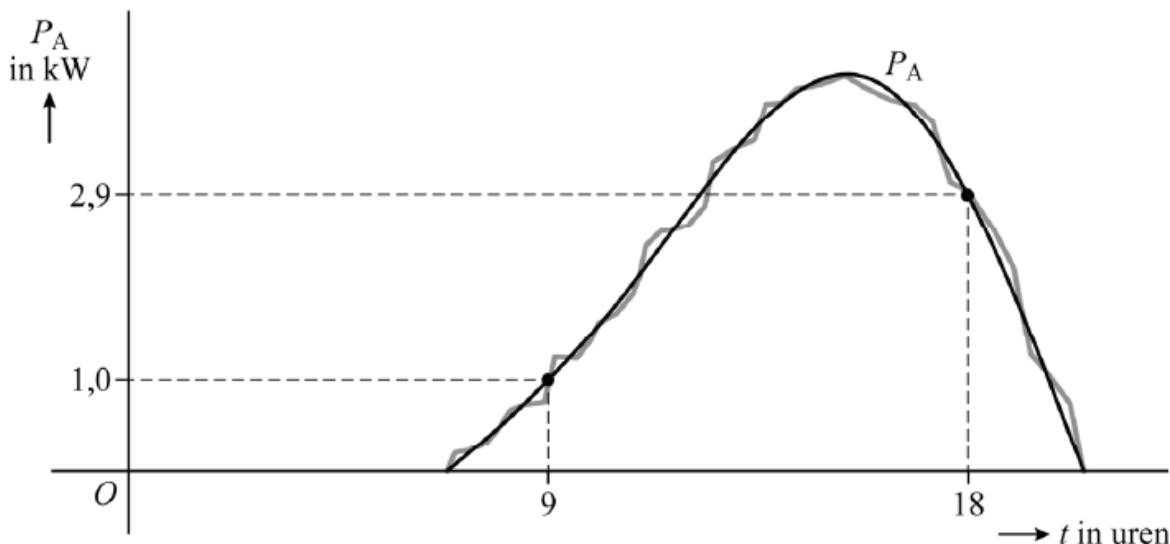
en dus

$$b = \frac{344 \tan 28^\circ}{2\sqrt{3} \cdot \tan 28^\circ + 1} \approx 64,36128434$$

Afgerond op hele centimeters: $b = 64$ cm.

Opmerkingen: Een aardige vraag: hier en daar twee stapjes doordenken en de figuur is ook echt nuttig.

- 5 Nu gaat het een andere kant op; we zien de grafiek van het opgewekte vermogen in de volgende figuur



De kromme wordt benaderd met een formule van de vorm $P_A = p \cos(qt) + \sin(2qt)$, met $0 < q < 0,4$. Zoals te zien is gaat de kromme door $(9, 1)$ en $(18, 2,9)$. Hieruit moeten p en q bepaald worden, in drie decimalen.

Uitwerking: We krijgen twee vergelijkingen:

$$1 = p \cos(9q) + \sin(18q) \quad \text{en} \quad 2,9 = p \cos(18q) + \sin(36q)$$

Je kunt p elimineren door beide vergelijkingen naar p op te lossen en de resultaten gelijk te stellen:

$$\frac{1 - \sin(18q)}{\cos(9q)} = \frac{2,9 - \sin(36q)}{\cos(18q)}$$

Die kun je numeriek op laten lossen (je zou, met wat moeite, alles in $\sin(9q)$ en $\cos(9q)$ uit kunnen drukken, maar het is de vraag of het de moeite waard is). Maple helpt: $q \approx 0,2309664200$, en na invullen $p \approx -3,803689010$.

Opmerkingen: Eigenlijk mag dit niet: de meetpunten zijn in ten hoogste twee significante cijfers, dus de berekening mag niet méér dan twee cijfers opleveren. Maar goed, afgezien van de eliminatiestap niet erg interessant dankzij het knoppen drukken.

- 6 Bij de burens wordt het vermogen gegeven door $P_B = -4,8 \cos(0,23t)$. De buurman koppelt zijn e-mobiel om 11:00 aan de laadpaal. De vraag is hoe lang het duurt voor zijn panelen zijn accu van 72 kWh van de helft naar driekwart zullen hebben opgeladen, waarbij gegeven is dat dit met behulp van de integraal $\int_{11}^{t_2} P_B dt$ kan. Antwoord in hele minuten.

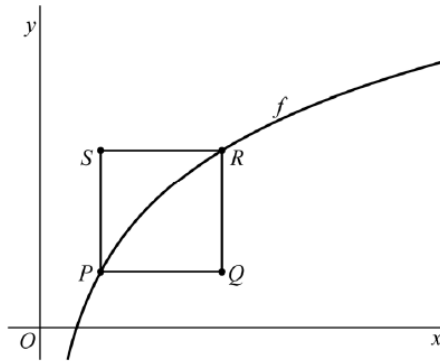
Uitwerking: We lossen de vergelijking $\int_{11}^{t_2} P_B dt = 18$ op (door de vraagstelling moeten we 72 door 4 delen). De integraal is gelijk aan

$$\int_{11}^{t_2} -4,8 \cos(0,23t) dt = \frac{4,8}{0,23} (\sin(2,53) - \sin(0,23t_2))$$

De resulterende vergelijking numeriek oplossen geeft $t_2 \approx 14,93075096$. Omgerekend naar minuten is dit 14 : 55 : 51, afgerond op hele minuten 14 : 56 dus, en dat is 3 uur en 56 minuten (236 minuten dus) later.

Opmerkingen: Voornamelijk knoppen drukken, en het decimale gedeelte ombouwen tot minuten en seconden. Niet moeilijk, hoop ik.

- 7 De volgende vier opgaven gaan over de functie f , gegeven door $f(x) = \ln(3x)$.

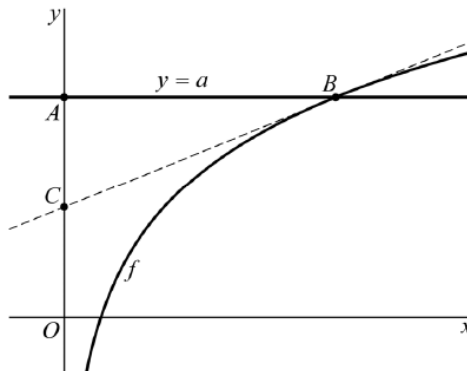


In dit plaatje is van het vierkant $PQRS$ gegeven dat elke zijde evenwijdig aan één der assen is, dat P en R op de grafiek van f liggen, en dat de x -coördinaat van R driemaal zo groot is als die van P . Gevraagd de coördinaten van P , algebraïsch en in twee decimalen.

Uitwerking: Als $P = (p, \ln(3p))$ dan geldt $R = (3p, \ln(9p))$, en daarnaast geldt ook dat $\ln(9p) - \ln(3p) = 3p - p$ (want PQ en QR zijn even lang). Even uitwerken: $2p = \ln(9) + \ln(p) - \ln(3) - \ln(p) = \ln(3)$. We vinden $p = \frac{1}{2} \ln(3)$ als x -coördinaat, en $\ln(\frac{2}{3} \ln(3))$ als y -coördinaat van P . In twee decimalen: $(0,55, 0,50)$.

Opmerkingen: Een elementaire oefening in logaritmen. Het exacte antwoord heeft ook zijn charme.

- 8 Nogmaals de grafiek van f , nu samen met de horizontale lijn $y = a$.

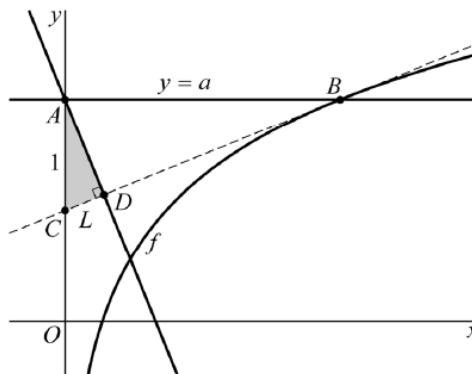


Te bewijzen: de raaklijn aan de grafiek in het snijpunt van beide snijdt de y -as één eenheid lager: de afstand tussen A en C is gelijk aan 1, ongeacht de waarde van a .

Uitwerking: De x -coördinaat van B voldoet aan $3x = e^a$, dus $x_B = e^a/3$. De afgeleide van $f(x) = \ln(3) + \ln(x)$ is $1/x$, dus $f'(x_B) = 3e^{-a}$. De vergelijking van de raaklijn is dus $y - a = 3e^{-a}(x - e^a/3)$. Als we $x = 0$ invullen vinden we $y_C - a = -1$, dus $y_C = a - 1$, als gewenst.

Opmerkingen: Een beetje gekunsteld om van de y -coördinaat uit te gaan, maar het zou niet moeilijk moeten zijn. Voor wie dit verassend vindt: Leibniz loste het omgekeerde probleem op. Dat vraagt naar krommen met een constante subtangent; en hij vond dat dat nu net de “logaritmische krommen” zijn.

- 9 Nu laten we loodlijn uit A op BC met snijpunt D .



De lengte van CD wordt L genoemd. Te bewijzen: de oppervlakte van de driehoek ACD is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{L^2 - L^4}$.

Uitwerking: De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA$, want de driehoek is rechthoekig. Verder geldt $CD^2 + DA^2 = 1$ (Pythagoras), dus $DA^2 = 1 - L^2$. Invullen: $\frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA = \frac{1}{2}L\sqrt{1 - L^2} = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - L^4}$.

Opmerkingen: Niet moeilijk, alles is al voorgekauwd; en dit heeft in principe niets met de functie f te maken. En dat laatste heeft gevolgen voor de volgende opgave.

- 10 Nu moet de maximale waarde van de oppervlakte van de driehoek ACD exact berekend worden.

Uitwerking: Het maximum van de functie $\frac{1}{2}\sqrt{L^2 - L^4}$ vinden we met de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde:

$$\frac{1}{2}\sqrt{L^2 \cdot (1 - L^2)} \leq \frac{1}{4}(L^2 + 1 - L^2) = \frac{1}{4}$$

met gelijkheid als $L^2 = 1 - L^2$, dus als $L^2 = \frac{1}{2}$, dat wil zeggen als $L = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opmerkingen: Dit is in lijn met de uitwerking(en) in het correctievoorschrift, en *onvolledig*. We hebben $\frac{1}{2}\sqrt{L^2 - L^4}$ gemaximaliseerd over het interval $[0, 1]$. Maar de functie komt uit de vorige opgave alwaar de L -en van a afhangen; nergens is nagegaan of de L -en waarover we maximaliseren inderdaad het hele interval bestrijken. In het bijzonder is niet nagegaan of er wel een waarde van a is waar de gevonden $L = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ bij hoort. Die is er gelukkig wel: bij $L = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ hoort de gelijkzijdige rechthoekige driehoek en daarin heeft CD helling 1. We moeten terug naar opgave 8: de helling van de raaklijn is gelijk aan $3e^{-a}$ en die is gelijk aan 1 als $e^a = 3$, dus als $a = \ln(3)$. De maximaal haalbare oppervlakte van $\frac{1}{4}$ wordt gehaald bij $a = \ln(3)$.

De vraag is wie dit is opgevallen.

- 11 Gegeven $A = (5, 4)$ en $B = (8, 5)$, en een derde (variabel) punt $P = (p, q)$. Bereken exact de x -coördinaat van P als P op de x -as ligt en AP en BP even lang zijn.

Uitwerking: De eisen impliceren dat $q = 0$, en dat $(p - 5)^2 + 4^2 = (p - 8)^2 + 5^2$. Uitwerken van de laatste, en wegstrepen van p^2 , leidt tot $6p = 48$, en dus $p = 8$.

Opmerkingen: Niet moeilijk zou ik zeggen. De opgave wordt vooraf gegaan door twee niet echt ter zake doende figuren en nogal voorzichtige aanhef. Men had ook gewoon “Bepaal het punt op de x -as dat even ver van A als van B af ligt” kunnen schrijven. De omstandige formulering lijkt er vooral om twee opgaven bij elkaar te kunnen zetten.

- 12 Terug in de algemene situatie wordt $\overrightarrow{AP}$ over 90° tegen de klok in gedraaid tot $\overrightarrow{AC}$, en $\overrightarrow{BP}$ over 90° met de klok mee tot $\overrightarrow{BD}$. Te bewijzen: het midden M van CD is onafhankelijk van de keuze van P .

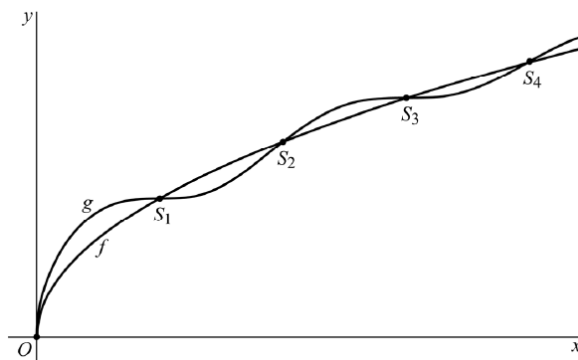
Uitwerking: We hebben $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p-5 \\ q-4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} p-8 \\ q-5 \end{pmatrix}$. Bekende draaiformules geven $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -(q-4) \\ p-5 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} q-5 \\ -(p-8) \end{pmatrix}$. De plaatsvector van het midden van CD is dan

$$\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(q-4) \\ p-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q-5 \\ -(p-8) \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

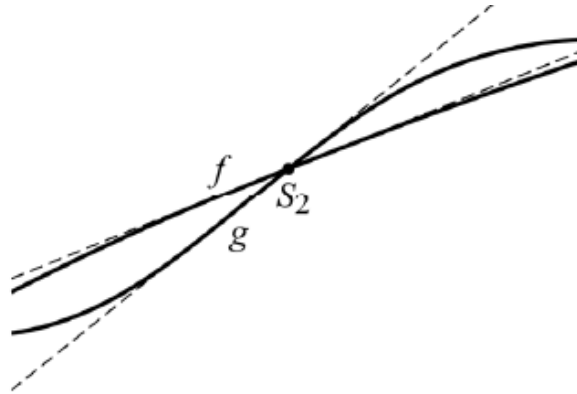
Dus M is altijd het punt $(6, 6)$.

Opmerkingen: Wel aardig maar de formulering is wat omslachtig en de figuren lijken niet veel toe te voegen. Wel aardig.

- 13 Gegeven twee functies f en g door $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{x + \sin x}$.



De snijpunten van de grafieken worden van links naar rechts genummerd als $S_1, S_2, S_3, \dots$ (O wordt uitgezonderd). Nabij S_2 ziet de situatie er als volgt uit



de gestippelde lijnen zijn de raaklijnen. Te bewijzen dat in een snijpunt met een even nummer de helling van de grafiek van g twee keer zo groot is als de helling van de grafiek van f .

Uitwerking: De snijpunten horen bij de nulpunten van $\sin x$, de veelvouden van π dus. Een snijpunt met een even nummer, $2k$, hoort bij $x = 2k\pi$. Er geldt $g(x) = f(x + \sin x)$, dus $g'(x) = f'(x + \sin x) \cdot (1 + \cos x)$. We zien dat $g'(2k\pi) = f'(2k\pi + \sin 2k\pi) \cdot (1 + \cos 2k\pi) = f'(2k\pi) \cdot 2$.

Opmerkingen: Niet moeilijk, ook niet als je alle afgeleiden expliciet uitwerkt. Wel was de inleiding weer erg uitgebreid; ik heb hierboven niet overgenomen dat ook nog werd meegegeven dat $f'(2\pi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ en $g'(2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; kennelijk als opzetje naar de algemene bewering dat er bij elk even nummer een factor 2 tussen zit.

- 14** Functies met een parameter: f_a wordt gegeven door $f_a(x) = |a - x^2| \cdot x + 3x$. Hierbij geldt $a > \frac{3}{2}$ en $x \geq 0$. Gegeven: de grafiek van f_a heeft bij $x = \sqrt{a}$ een knik en links daarvan heeft de grafiek een top. Te bewijzen: de y -coördinaat van die top is te schrijven als $2(\frac{1}{3}a + 1)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1}$.

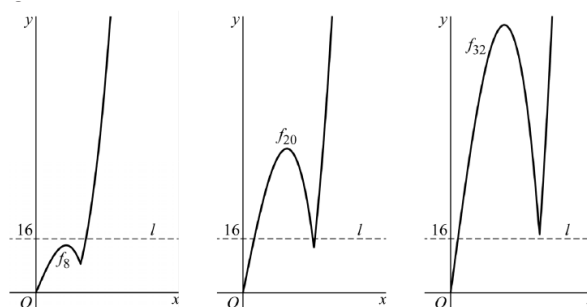
Uitwerking: Voor $x \leq \sqrt{a}$ geldt $|a - x^2| = a - x^2$, en dus $f_a(x) = (a + 3)x - x^3$. De afgeleide is $f'_a(x) = (a + 3) - 3x^2$, met (enig) positief nulpunt $x = \sqrt{\frac{1}{3}a + 1}$. Invullen in de functie:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}a + 1}\right) = (a + 3)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1} - \left(\frac{1}{3}a + 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1} = 2\left(\frac{1}{3}a + 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}a + 1}$$

als gewenst.

Opmerkingen: In principe niet moeilijk, wel rekening houden met haakjes en zo.

- 15** Gegeven wordt nu dat bij toenemende a de y -coördinaten van de top en de knik toenemen. Hier geïllustreerd voor $a = 8, 20$, en 32 .

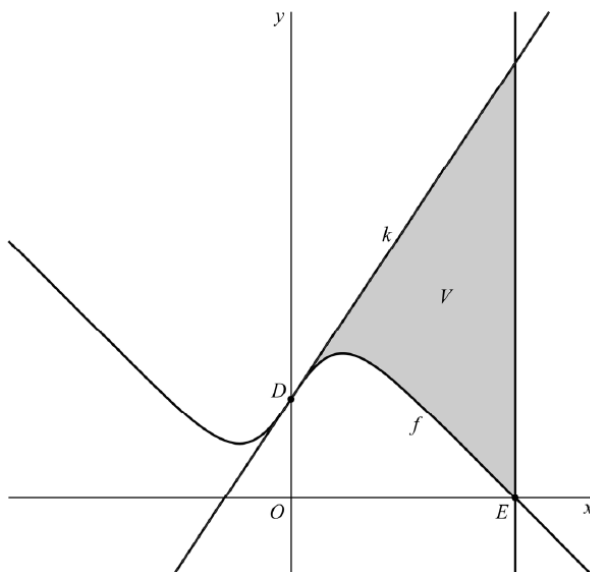


Te bepalen, exact: het interval van de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a de lijn $y = 16$ in drie punten snijdt.

Uitwerking: Zoals de plaatjes aangeven moeten we de a s hebben waarvoor de top boven de lijn ligt en de knik onder de lijn. De knik ligt op hoogte $3\sqrt{a}$, de hoogte van de top kennen we al: $2(\frac{1}{3}a + 1)^{\frac{3}{2}}$. Dus op te lossen $3\sqrt{a} < 16$ en $2(\frac{1}{3}a + 1)^{\frac{3}{2}} > 16$. De eerste levert $a < 16^2/9$, en de tweede leidt tot $\frac{1}{3}a + 1 > 8^{\frac{2}{3}} = 4$, en dus $a > 9$. We vinden het interval $(9, \frac{256}{9})$,

Opmerkingen: Weer heel veel inleiding voor een in wezen niet moeilijke som.

- 16 Gegeven de functie f door $f(x) = \frac{10e^x}{e^x+1} - (x+1)$.



In het plaatje zien we de grafiek van f , de raaklijn k aan de grafiek in D met vergelijking $y = \frac{3}{2}x + 4$, en het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f , de lijn k , en de verticale lijn door E , het snijpunt van de grafiek van f met de x -as. Te berekenen: de inhoud van het wentellichaam dat ontstaat door V om de x -as de wentelen. Het eindantwoord moet als geheel getal gegeven worden.

Uitwerking: Het antwoord is duidelijk:

$$\pi \int_0^e \left(\frac{3}{2}x + 4 \right)^2 dx - \pi \int_0^e f(x)^2 dx$$

waarbij e de x -coördinaat van E is. De eerste integraal is makkelijk:

$$\pi \left[\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x + 4 \right)^3 \cdot \frac{2}{3} \right]_0^e = \frac{2\pi}{9} \left(\frac{3}{2}e + 4 \right)^3 - \frac{128}{9}\pi$$

De tweede iets minder, als je $f(x)^2$ uitwerkt komt er een stukje zonder elementaire primitieve te voorschijn. Dat moet dus numeriek. Ook is e niet exact te bepalen, numeriek $f(x) = 0$ oplossen geeft $e \approx 8,998764529$. Invullen van de hele uitdrukking in een geschikte oplosser (Maple) geeft als antwoord 3211,890753, afgerond 3212 dus.

Opmerkingen: Tsja, ik ben niet zo dol op dit soort sommen. Ik hoop dat de uitdrukking voor $f(x)$ zonder tikfouten ingevoerd werd.

- 17 We gaan door met f . Er wordt voorgezegd dat de grafiek van f twee scheve asymptoten met helling -1 heeft, met vergelijkingen $y = -x - 1$ en $y = -x + 9$. En dat laatste moet bewezen worden.

Uitwerking: Het gedeelte $10e^x/(e^x+1)$ heeft duidelijke limieten voor $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10e^x}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{1+e^{-x}} = \frac{10}{1+0} = 10 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Dit levert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (-x+9) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10e^x}{e^x+1} - 10 = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10e^x}{e^x+1} = 0$$

Hetgeen bewezen moest worden.

Opmerkingen: Niet moeilijk als je de definitie kent. Het voorschrift vraagt om een “exacte toelichting”; lijkt me in dit een pleonasme.

- 18 De functie f verdwijnt; de asymptoten blijven over en we moeten het middelpunt M van de cirkel bepalen die raakt aan beide asymptoten en aan de x -as, en die onder de x -as ligt.

Uitwerking: Het punt M ligt op de lijn midden tussen de beide asymptoten, en die heeft vergelijking $y = -x + 4$. Verder is de y -coördinaat van M gelijk aan $-r$, waar r de straal van de cirkel is, en die is weer gelijk aan de helft van de afstand tussen de lijnen. Ik herinner me van vroeger nog de formule voor die afstand. De vergelijkingen zijn te schrijven als $x+y=9$ en $x+y=-1$; de afstand is dan gelijk aan $\frac{|9-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$. Kortom: $M = (x, -\frac{5}{2}\sqrt{2})$ en $-\frac{5}{2}\sqrt{2} = -x + 4$ of $x = 4 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Opmerkingen: Wel aardig, vooral omdat er vele wegen naar de afstand kunnen leiden. Omdat de hellingen van de lijnen gelijk zijn aan -1 zijn de horizontale en verticale afstanden gelijk, aan 10. Dan is de afstand gelijk aan $10 \cos \frac{\pi}{4}$. Of je maakt vanuit M een gelijkzijdige rechthoekige driehoek met zijden 5, 5, en hypotenusa $5\sqrt{2}$ (op een van de lijnen), daaruit volgt dat M op $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ van de lijnen ligt.