

EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2026-05-13

- 1 Gegeven het punt P met coördinaten $(7, 24)$ en de lijn k met vergelijking $3x - 4y = 0$ (die komen terug in opgave 2). De cirkel c heeft middelpunt $(0, 0)$ en gaat door P ; verder snijdt c de lijn k rechts van de y -as in S . Gevraagd de coördinaten van S (exact).

Uitwerking: De straal van c is de lengte van de plaatsvector van P , en wie wat Pythagorische drietallen kent die ziet hier $(7, 24, 25)$ dus de straal van c is gelijk aan 25. Verder is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van k en is $(4, 3, 5)$ ook een Pythagorisch drietal, vermenigvuldig dat met 5 en je krijgt $(20, 15, 25)$. De coördinaten van S zijn dus $(20, 15)$.

Opmerkingen: Ik mag hopen dat dit als weggever is bedoeld. De oplossing in het correctievoorschrift is de voor de hand liggende: y uitdrukken in x in k , en invullen in de vergelijking van c (die natuurlijk $x^2 + y^2 = 25^2$ is).

- 2 We hebben een punt A op k , en B is de loodrechte projectie van A op de y -as. Bepaal A zó dat de bissectrice van de hoek $\angle OAB$ door P gaat (algebraïsch).

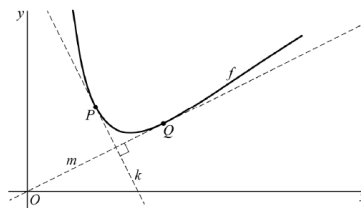
Uitwerking: De vector $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ is ook een richtingsvector van k en wijst vanuit A naar $(0, 0)$, verder wijst $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ vanuit A naar B . Deze vectoren zijn even lang, dus hun som, $\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$, is een richtingsvector van de bissectrice van $\angle OAB$ en dus van de lijn door P en A . We zien dat A het snijpunt is van k met de lijn die $\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ als vectorvoorstelling heeft. Vul de laatste in de vergelijking van k in: $3(7-9t) - 4(24-3t) = 0$, of $-75 - 15t = 0$, of $15t = -75$, of $t = -5$. Invullen van t levert $A = (52, 39)$.

Opmerkingen: Moet te doen zijn en is wel aardig. De reden voor “algebraïsch” in plaats van “exact” zien we in een andere oplossing: die gebruikt, via een rekenmachien, de tangens van $\angle OAP$. (Daar is via de verdubbelingsformule voor de tangens, $\tan(2\alpha) = 2 \tan(\alpha)/(1 - \tan^2(\alpha))$, nog wel een exacte mouw aan te passen.)

- 3 Gegeven de functie f op het interval $(0, 2]$ door

$$f(x) = 2 \ln(x) + \frac{3}{2x} - 1$$

met een plaatje



Het punt P ligt op de grafiek en heeft x -coördinaat $\frac{1}{2}$. De lijn k raakt f in P . De lijn m staat loodrecht op k en raakt f in Q . Gevraagd: de coördinaten van Q (exact).

Uitwerking: De afgeleide van f is gegeven door $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2}$. In P hebben we $f'(\frac{1}{2}) = 4 - 6 = -2$ als helling van de raaklijn. De helling h in Q moet voldoen aan $-2 \cdot h = -1$, dus $h = \frac{1}{2}$. Nu $f'(x) = \frac{1}{2}$ oplossen:

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Vermenigvuldig met $2x^2$ en er komt $4x - 3 = x^2$ of $x^2 - 4x + 3 = 0$. Kwadraat afsplitsen: $(x-2)^2 = 1$, en dus $x = 2 \pm 1$. Van de twee oplossingen, 1 en 3, ligt alleen de eerste in ons interval dus $Q = (1, f(1)) = (1, \frac{1}{2})$.

Opmerkingen: Lijkt me ook goed te doen; het plaatje laat m door O gaan, en dat klopt achteraf ook maar het zou tot oneigenlijke oplossingen kunnen leiden. Overigens heeft de grafiek in $\frac{3}{2}$ een buigpunt, dus twee punten met dezelfde helling is dan niet onmogelijk.

- 4 Een tweede functie g wordt gegeven door

$$g(x) = 2 \ln(2x) + \frac{3}{4x} - 1$$

waarvan wordt gegeven dat diens grafiek door één transformatie uit die van f kan ontstaan. Gevraagd wat die transformatie is.

Uitwerking: Goed naar de formules kijken: $g(x) = f(2x)$, argument verdubbelen dus; daar hoort de transformatie “vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$ ” bij.

Opmerkingen: Niet moeilijk; maar, . . . , eigenlijk niet correct: er wordt geen beperking aan het domein van g opgelegd, dus g is in principe op heel $(0, \infty)$ gedefinieerd. De transformatie van f geeft dan maar een klein stukje van g .

- 5 De grafieken van f en g snijden elkaar in S . Gevraagd de x -coördinaat van S (exact).

Uitwerking: Uitschrijven van $f(x) = g(x)$ levert

$$2 \ln(x) + \frac{3}{2x} = 2 \ln(2) + 2 \ln(x) + \frac{3}{4x}$$

Na wegstrepen van $2 \ln(x)$ houden we $3/(4x) = 2 \ln(2)$ over, met oplossing $x = 3/(8 \ln(2))$.

Opmerkingen: Na omschrijven makkelijk (en de oplossing ligt gelukkig in het domein van f).

- 6 Een functie f_p met een parameter p is gegeven door

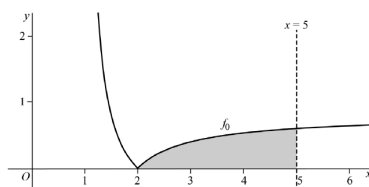
$$f_p(x) = \frac{|x - 2| + p}{x - 1}$$

Voor één waarde van p heeft de grafiek van f een perforatie; gevraagd de coördinaten van die perforatie (exact).

Uitwerking: De enige plek waar een perforatie op zou kunnen treden is daar waar de noemer van f_p gelijk aan 0 is, voor $x = 1$ dus. Wil daar een perforatie optreden dan zal de teller daar ook de waarde 0 aan moeten nemen. Voor $x < 2$ geldt $|x - 2| + p = 2 - x + p$; invullen van $x = 1$ en nul stellen levert $p = -1$. Voor $x < 2$ en $x \neq 1$ geldt dan $f_{-1}(x) = \frac{1-x}{x-1} = -1$. Voor $p = -1$ heeft f_p dus een perforatie in $(1, -1)$ want $\lim_{x \rightarrow 1} f_{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -1 = -1$.

Opmerkingen: Niet moeilijk als je weet hoe je moet zoeken.

- 7 Nu kijken we naar f_0 , met bijgeleverde grafiek:



en bijgeleverde informatie dat $f_0(x) = |1 - \frac{1}{x-1}|$ voor $x > 1$. Gevraagd de oppervlakte van het grijze vlakdeel V (exact).

Uitwerking: Voor $x \geq 2$ geldt $f_0(x) = \frac{x-2}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1}$. De oppervlakte van V is dus gelijk aan

$$\int_2^5 1 - \frac{1}{x-1} dx = [x - \ln(x-1)]_2^5 = 3 - \ln(4)$$

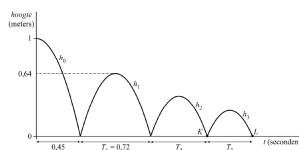
Opmerkingen: Die extra informatie over f_0 zou ik niet gegeven hebben; aan $\frac{|x-2|}{x-1}$ is meteen te zien dat f_0 rechts van 2 gegeven wordt door $\frac{x-2}{x-1}$.

- 8 Een stuitende bal is het onderwerp van deze en de volgende som. De bal wordt op 1 m hoogte losgelaten; de hoogtefunctie bestaat uit een serie stukjes van parabolen, voor elke ‘stuit’ één (zie het plaatje bij de volgende som). Alleen de eerste stuit geeft een halve parabool, met voorschrift $h_0(t) = 1 - 4,9t^2$. Gevraagd: de snelheid, in m/s, waarmee de bal de eerste keer de grond raakt (algebraïsch, één decimaal).

Uitwerking: Eerst het tijdstip uitrekenen, dus $4,9t^2 = 1$ oplossen: $t \approx 0,4517539515$ s. Dit invullen in $h'_0(t) = -9,8t$ geeft $v \approx -4,427188725$ m/s, afgerond $-4,4$ m/s dus.

Opmerkingen: Niet moeilijk.

- 9 Iedere volgende parabool haalt een hoogte die 64% van die van de vorige is.



Het plaatje suggereert dat de tijdsduren tussen de stuiten afnemen. Met T_n geven we (vanaf $n = 1$) de n -de tijdsduur aan. Deze voldoet aan de formule $T_n = 0,9 \cdot 0,8^n$. Hiermee moet een functievoorschrift voor de functie h_3 bepaald worden.

Uitwerking: Met behulp van de formule vinden we $T_1 = 0,72$, $T_2 = 0,576$, $T_3 = 0,4608$, \dots . Daarmee zien we dat $K = (1,746, 0)$ en $L = (2,2068, 0)$. De top van h_3 ligt midden tussen K en L , bij $t = 1,9764$ dus. De hoogte van die top is $0,64^3 = 0,262144$. Conclusie: $h_3(t) = 0,262144 - 4,9(t - 1,9764)^2$.

Opmerkingen: Dit was wel aardig. In het correctievoorschrift kwam men telkens uit op 4,94 in plaats van mijn 4,9. Dit kwam doordat men ervoor zorgde dat de nulpunten van h_3 bij K en L zitten. Dat geeft het merkwaardige effect dat bij iedere stuit de gravitatieconstante kennelijk meeverandert. Overigens hebben beide versies van h_3 hun nulpunten niet in K en L : bij 4,9 zijn de waarden iets te groot, namelijk $0,00203\dots$, en bij 4,94 iets te klein: $-0,00009\dots$

- 10 Een punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen

$$x(t) = t^2(2 - t) \text{ en } y(t) = 2t(2 - t) \text{ met } 0 \leq t \leq 2$$

De snelheidsvector op tijdstip t wordt ook meegegeven:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4t - 3t^2 \\ 4 - 4t \end{pmatrix}$$

De baansnelheid (de *vaart*) is op één tijdstip minimaal. Gevraagd dat tijdstip (in twee decimalen).

Uitwerking: Het kwadraat van de lengte van \vec{v} is gelijk aan

$$(4t - 3t^2)^2 + (4 - 4t)^2$$

De afgeleide hiervan is $36t^3 - 72t^2 + 64t - 32$. De exacte oplossing hiervan is (Cardano)

$$\frac{(108 + 12\sqrt{93})^{\frac{1}{3}}}{9} - \frac{4}{3(108 + 12\sqrt{93})^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3}$$

Maple's `evalf` maakt hier $1,121551869$ van, in twee decimalen $1,12$ dus.

Opmerkingen: Gezien de uitwerking in het voorschrift was dit inderdaad een knoppensom.

- 11 Het punt Q doorloopt dezelfde baan als P , maar loopt de hele tijd één seconde achter. Gegeven: er is één tijdstip waarop P en Q op gelijke hoogte liggen. Gevraagd: de lengte van lijnstuk PQ op dat tijdstip (exact).

Uitwerking: De parametrizing voor Q is $(x(t-1), y(t-1))$, dus we zoeken t zó dat $y(t-1) = y(t)$. Dus $(t-1)(2-(t-1)) = t(2-t)$ oplossen (links en rechts 2 weggestreept). Uitvermenigvuldigen: $-t^2 + 4t - 3 = -t^2 + 2t$, of $2t = 3$, dus $t = \frac{3}{2}$. Dus PQ heeft lengte $x(\frac{3}{2}) - x(\frac{1}{2}) = \frac{9}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$.

Opmerkingen: Wie denkt dat Q volgens $(x(t+1), y(t+1))$ beweegt heeft pech. Verder niet moeilijk.

- 12 De parametrizing wordt variabel gemaakt door de 2 in $y(t)$ te vervangen door een parameter a (ongelijk aan 0). In punt A is de x -coördinaat maximaal, en in B is de y -coördinaat maximaal. Gegeven: er is een waarde van a waarvoor de lijn door A and B helling -1 heeft. Gevraagd: deze waarde van a (exact).

Uitwerking: Via de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde vinden we dat

$$\frac{1}{4}t^2(2-t) = \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} \cdot (2-t) \leq \left(\frac{\frac{t}{2} + \frac{t}{2} + (2-t)}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$$

met gelijkheid alléén als $\frac{t}{2} = 2-t$, dus als $t = \frac{4}{3}$. Dit geeft ons dat $A = (\frac{32}{27}, \frac{8a}{9})$.

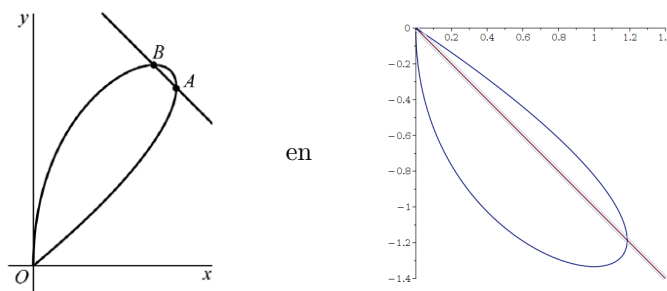
Evenzo geldt $t \cdot (2-t) \leq (\frac{t+(2-t)}{2})^2 = 1$, met gelijkheid alleen als $t = 1$. Dit geeft ons dat $B = (1, a)$ als $a > 0$; en $B = (0, 0)$ als $a < 0$, want dan geldt $y(t) \leq 0$ met maximum $y(0) = y(2) = 0$.

We vinden dat de vector \overrightarrow{BA} gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{27} \\ -\frac{a}{9} \end{pmatrix} \text{ als } a > 0 \quad \text{en aan} \quad \begin{pmatrix} \frac{32}{27} \\ \frac{8a}{9} \end{pmatrix} \text{ als } a < 0$$

Dus als $a > 0$ moet a voldoet aan $-\frac{5}{27} = -\frac{a}{9}$, met oplossing $a = \frac{5}{3}$; als $a < 0$ moet gelden dat $-\frac{32}{27} = \frac{8a}{9}$, met oplossing $a = -\frac{4}{3}$.

Opmerkingen: Tsjja, ..., er is gezegd dat $a \neq 0$, dus $a < 0$ is ook mogelijk. De bijgeleverde figuur is niet volledig (eigenlijk misleidend), er zijn twee mogelijkheden:

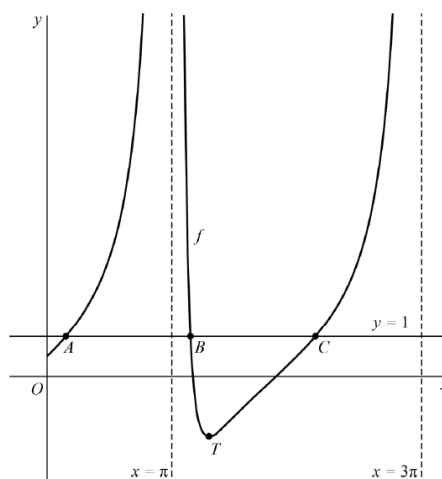


Zowel de opstellers als het voorschrift hebben dit niet opgemerkt. Dus “deze waarde van a ” had “deze waarden van a ” moeten zijn.

13 We krijgen een functie f met goniöfuncties erin:

$$f(x) = \frac{1 + 2 \sin(x)}{1 + \cos(x)} \text{ op } [0, 3\pi] \setminus \{\pi\}$$

en met de grafiek bijgeleverd (ook voor de volgende twee sommen)



De drie punten A , B , en C liggen op de lijn met vergelijking $y = 1$ en we moeten aantonen dat $AB = BC$.

Uitwerking: We moeten dus eerst maar eens $f(x) = 1$, ofwel $1 + 2 \sin(x) = 1 + \cos(x)$, oplossen, en dat wordt $2 \sin(x) = \cos(x)$. Voor deze vergelijking geldt dat met elke oplossing x_0 ook $x_0 + \pi$ een oplossing is want $\sin(x_0 + \pi) = -\sin(x_0)$ en $\cos(x_0 + \pi) = -\cos(x_0)$. Als we het plaatje geloven zijn er in het domein drie oplossingen — te weten x_A , x_B , en x_C — en die liggen dus π uit elkaar: we zien $AB = \pi = BC$. Voor wie het plaatje niet geloofd: de vergelijking is equivalent aan $\tan(x) = \frac{1}{2}$. Omdat de tangens op elk interval $(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2})$ strict stijgend is en periodiek met periode π zien we dat er inderdaad drie oplossingen zijn in het gegeven domein die te schrijven zijn als x_0 , $x_0 + \pi$, en $x_0 + 2\pi$.

Opmerkingen: Op zich niet moeilijk, zeker als je alle gegeven informatie meeneemt, met name de uniciteit, per interval, van de oplossingen.

14 Van het punt T in de figuur wordt gegeven dat het een top is, en wel onder de x -as. Te bewijzen: de x -coördinaat van T voldoet aan $5 \cos^2(x) + 8 \cos(x) + 3 = 0$.

Uitwerking: Voor die coördinaat moet dus $f'(x) = 0$ gelden. En

$$f'(x) = \frac{2 \cos(x)(1 + \cos(x)) - (1 + 2 \sin(x)) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{2 \cos(x) + \sin(x) + 2}{(1 + \cos(x))^2}$$

Dus moet gelden dat $2 \cos(x) + \sin(x) + 2 = 0$. Na wat proberen kun je hier $2 \cos(x) + 2 = -\sin(x)$ van maken en kwadrateren: $4 \cos^2(x) + 8 \cos(x) + 4 = \sin^2(x)$, en dat levert de gevraagde gelijkheid $5 \cos^2(x) + 8 \cos(x) + 3 = 0$ op.

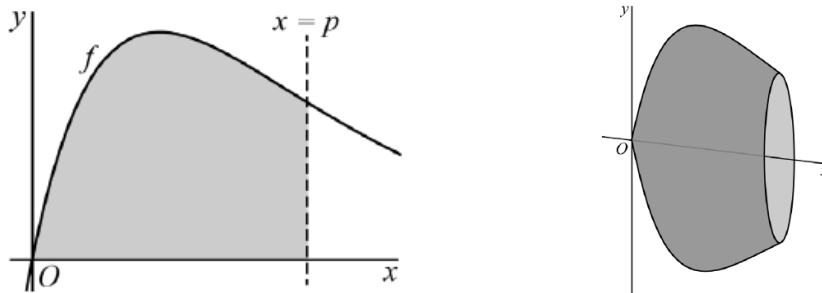
Opmerkingen: Een beetje bewerkelijk misschien, maar te doen.

- 15 Nu moet de y -coördinaat van T bepaald worden (algebraïsch).

Uitwerking: Je kunt de vergelijking uit de vorige som ontbinden: $(5 \cos(x) + 3)(\cos(x) + 1) = 0$. En omdat π buiten het domein ligt blijft $5 \cos(x) + 3 = 0$ over, dus $\cos(x) = -\frac{3}{5}$, en daarmee $\sin(x) = \pm \frac{4}{5}$ (de 3-4-5-steek). We hebben dus drie mogelijke x -en met $\cos(x) = -\frac{3}{5}$: x_1 in het interval $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, x_2 in $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, en x_3 in $(\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$ (NB $x_3 = x_1 + 2\pi$). Dan geldt $\sin(x_1) = \sin(x_3) = \frac{4}{5}$ en $\sin(x_2) = -\frac{4}{5}$. Invullen in $f'(x)$ geeft $f'(x_1) = f'(x_3) = 10$, dus dat waren spookoplossingen. Blijft over x_2 , en inderdaad $f'(x_2) = 0$. Tenslotte vinden we dan dat $f(x_2) = (1 - \frac{8}{5}) / (1 - \frac{3}{5}) = -\frac{3}{2}$.

Opmerkingen: Mijn uitwerking is wat uitgebreider dan die in het voorschrift; die laat zich wel erg door de tekening leiden. Er wordt niets gecontroleerd en het geval $\sin(x) = \frac{4}{5}$ lijkt vooral af te vallen omdat het een positieve functiewaarde oplevert, niet omdat het een spookoplossing van $f'(x) = 0$ is die door het kwadrateren is gematerialiseerd.

- 16 We krijgen de functie f , gegeven door $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$. Met een plaatje van de grafiek en het wentellichaam van het gebied onder de grafiek tussen $x = 0$ en $x = p$.



Te bewijzen: de inhoud, L_p , van het wentellichaam is gelijk aan $\frac{\pi}{12}(1 - 6e^{-2p} + 8e^{-2p} - 3e^{-4p})$.

Uitwerking: Dat gaat via $\pi \cdot \int_0^p f^2(x) dx$. Dus

$$\begin{aligned} L_p &= \pi \int_0^p (e^{-x} - e^{-2x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^p e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x} dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-3x} - \frac{1}{4}e^{-4x} \right]_0^p \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2}e^{-2p} + \frac{2}{3}e^{-3p} - \frac{1}{4}e^{-4p} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{12}(1 - 6e^{-2p} + 8e^{-2p} - 3e^{-4p}) \end{aligned}$$

Opmerkingen: Een verder eenvoudige integratorsom.

- 17 Gegeven: als p onbegrensd toeneemt nadert L_p tot een limietwaarde L . Er is een waarde van p waarvoor L_p gelijk is aan $\frac{1}{2}L$. Gevraagd: deze waarde van p (twee decimalen).

Uitwerking: Om te beginnen, via standaardlimieten en rekenregels vinden we

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\pi}{12}(1 - 6e^{-2p} + 8e^{-2p} - 3e^{-4p}) = \frac{\pi}{12}(1 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 3 \cdot 0) = \frac{\pi}{12}$$

We moeten dus $L_p = \frac{\pi}{24}$ oplossen, en dat betekent dat de uitdrukking tussen de haakjes gelijk moet zijn aan $\frac{1}{2}$ en dat komt uiteindelijk weer neer op

$$6e^{-2p} - 8e^{-2p} + 3e^{-4p} = \frac{1}{2}$$

Je kunt $u = e^{-p}$ stellen, dan $3u^4 - 8u^3 + 6u^2 = \frac{1}{2}$ met de formules van Ferrari oplossen, en de logaritme van de oplossing in het interval $(0, 1)$ nemen maar dat is wat veel werk. Met behulp van Maple's `evalf`commando vinden we $p \approx 0,9526239408$, en in twee decimalen krijgen we $p \approx 0,95$.

Opmerkingen: De limiet mag geen probleem opleveren en het opstellen van de vergelijking eigenlijk ook niet.