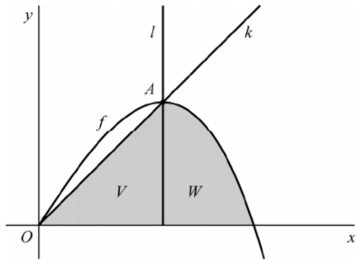
EINDEXAMEN WISKUNDE B, VWO, 2026-06-18

1 Gegeven de functie f, voor $x \geqslant 0$, door $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x$, met bijgeleverd plaatje van de grafiek met daarin allerlei zaken aangegeven.



Gegeven is dat A de top van de grafiek is, met coördinaten $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Gevraagd te onderzoeken of V en W gelijke oppervlakte hebben (op exacte wijze).

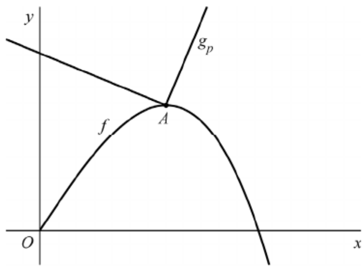
Uitwerking: De oppervlakte van de driehoek V is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}$. De oppervlakte van W berekenen we met behulp van een integraal. Hiervoor hebben we de positieve oplossing van $-x^3 + \frac{3}{2}x = 0$ nodig, en die is gelijk aan $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$; de integraal wordt dus

$$\int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{6}} -x^3 + \frac{3}{2}x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2\right]_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{6}} = -\frac{9}{16} + \frac{9}{8} + \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

Dus: ja, de oppervlakten zijn gelijk.

Opmerkingen: Niet moeilijk, hoop ik.

2 Een tweede functie g_p, afhankelijk van een positieve parameter p, is gegeven door $g_p(x) = x + |px - 1|$. De grafiek van g_p heeft een knik en voor één waarde van p ligt die knik in het punt A.



Te bewijzen: in dat geval maakt de knik een rechte hoek.

Uitwerking: Om de helling van de functie $|px - 1|$ in $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ te laten veranderen van $-p$ in p moet gelden dat $\frac{p}{2}\sqrt{2} - 1 = 0$ ofwel $p = \sqrt{2}$. Alternatief: er moet in ieder geval gelden dat $g_p(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; dit leidt ook tot $\frac{p}{2}\sqrt{2} - 1 = 0$. Hoe dan ook, als $p = \sqrt{2}$ vinden we

$$g_{\sqrt{2}}(x) = \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x + 1 & \text{als } x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ (1 + \sqrt{2})x - 1 & \text{als } x \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Het product van de beide hellingen is $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$ dus de twee halve lijnen staan loodrecht op elkaar.

Opmerkingen: Aardige vraag met een klein beetje diepgang.

3 De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{2\sin(x) - 1}{4\sin^2(x) - 1}$$

Gegeven: in het $[0, \pi]$ heeft de grafiek van f twee perforaties. Gevraagd: de coördinaten van die perforaties (exact).

Datum: 19-06-2026/16:37:51.

Uitwerking: De formule van f is te vereenvoudigen tot

$$\frac{2\sin(x)-1}{4\sin^2(x)-1} = \frac{2\sin(x)-1}{2\sin(x)-1}\cdot\frac{1}{2\sin(x)+1} = \frac{1}{2\sin(x)+1} \qquad \text{mits } 2\sin(x)\neq 1$$

Die laatste uitdrukking is op heel $[0,\pi]$ gedefinieerd, dus de schuld van de perforaties ligt bij de andere factor in het midden: $\frac{2\sin(x)-1}{2\sin(x)-1}$. Die is van de vorm $\frac{0}{0}$ als $\sin(x)=\frac{1}{2}$, dus als $x=\frac{\pi}{6}$ of als $x=\frac{5\pi}{6}$. De perforaties liggen dus in $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ en $(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2})$.
Opmerkingen: Niet moeilijk zou ik denken.

4 Een 'practische' opgave: de formule voor de temperatuur T van een vloeistof in een thermosfles (volledig gevuld en afgesloten)

$$T(t) = A + (T_0 - A)\cdot \mathrm{e}^{-ct}$$

met: t in uren; T_0 de begintemperatuur ($T(0)$ dus); A de omgevingstemperatuur; en c een constante.

Om 9:00 wordt de fles gevuld en afgesloten. De vloeistoftemperatuur is dan 87° C en de omgevingstemperatuur blijft constant. Om 11:30 is de temperatuur 67° C en om 14:00 is deze 53° C. Gevraagd: de temperatuur om 15:00 (in gehele graden).
Uitwerking: Als we $t=0$ met 9:00 overeen laten komen vinden we alvast $T_0=87$. De toestand om 11:30 (dus $t=2\frac{1}{2}$) levert $67 = A + (87-A)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}c}$. Evenzo vinden we om 14:00 dat $53 = A+(87-A)\cdot\mathrm{e}^{-5c}$. Dat levert de volgende twee gelijkheden:

$$\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}c} = \frac{67-A}{87-A} \qquad \text{en} \qquad \mathrm{e}^{-5c} = \frac{53-A}{87-A}$$

Omdat $\mathrm{e}^{-5c} = (\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}c})^2$ kunnen we hier

$$\frac{53-A}{87-A} = \left(\frac{67-A}{87-A}\right)^2$$

van maken, ofwel $(53-A)(87-A) = (63-A)^2$, en dus $53\cdot 87 - 67^2 = 6A$, met oplossing $A = 20\frac{1}{3}$. Dus geldt ook $\mathrm{e}^{-5c} = (53-20\frac{1}{2})/(87-20\frac{1}{3}) = \frac{49}{100}$. De gevraagde temperatuur om 15:00 (dus als $t=6$) is gelijk aan

$$20\frac{1}{3} + (87-20\frac{1}{3})\left(\frac{49}{100}\right)^{\frac{6}{5}} \approx 48{,}66$$

want $\mathrm{e}^{-6c} = (\mathrm{e}^{-5c})^{\frac{6}{5}}$. In hele graden is dat 49° C.
Opmerkingen: Niet geheel flauw, wel aardig.

5 Er zijn twee thermosflessen met temperatuurfuncties respectievelijk $T_1(t) = 20 + 75\cdot\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ en $T_2(t) = 20+75\cdot\mathrm{e}^{-0{,}15t}$. Gevraagd: het maxmale temperatuurverschil tussen de flessen (in hele graden).
Uitwerking: De verschilfunctie is $75\cdot(\mathrm{e}^{-0{,}15t}-\mathrm{e}^{-0{,}2t})$. Dat is te schrijven als $75\cdot(x^3-x^4)$, met $x=\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ en dus $0<x\leqslant 1$. Gebruik de ongelijkheid van rekenkundig- en meetkundig gemiddelde:

$$x^3 - x^4 = 27\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot(1-x) \leqslant 27\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{27}{256}$$

met gelijkheid als $\frac{x}{3} = 1-x$, dat wil zeggen als $x=\frac{3}{4}$. Het maximum van het verschil is dus gelijk aan $(75\cdot 27)/256 = 7\frac{233}{256}$. Afgerond op hele graden is dat 8° C.
Opmerkingen: Het kan dus exact; x^3-x^4 differentiëren en $3x^2-4x^3=0$ oplossen geeft ook $x=\frac{3}{4}$. De standaardoplossing differentieert de exponentiële functies en komt uiteindelijk op een onnodig tijdstip uit: als je weet dat $\mathrm{e}^{-0{,}05t}=\frac{3}{4}$ ben je klaar. Maar met een rekenmachien bij de hand is de omweg via t niet lang.

6 Er zijn drie punten $A=(5-p,2p)$, $B=(2p,p)$, en $C=(5,5)$. Een inleidend verhaal (dat er niet toe doet) leidt tot de vraag p zó te bepalen dat $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ dezelfde richting op wijzen (in twee decimalen).
Uitwerking: We hebben

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-p\\2p-5\end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}2p-5\\p-5\end{pmatrix}$$

De eis op de richting leidt tot de vergelijking

$$\frac{-p}{2p-5} = \frac{2p-5}{p-5}$$

en de eis dat $-p$ en $2p-5$ hetzelfde teken hebben (en $2p-5$ en $p-5$ ook).

Kruislings vermenigvuldigen geeft $-p^2 + 5p = 4p^2 - 20p + 25$, ofwel $5p^2 - 25p + 25 = 0$. Kwadraat afsplitsen: $5(p^2 - 5p + 5) = 5\big((p - \frac{5}{2})^2 + 5 - \frac{25}{4}\big) = 5\big((p - \frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4}\big)$. We vinden dus $(p - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{4}$ met $p = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. De oplossing $p = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ valt af want dan $-p < 0 < \sqrt{5} = 2p - 5$. Voor $p = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ geldt $-p < 0$ en $2p - 5 = -\sqrt{5} < 0$ (en ook $p - 5 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < 0$). Dus $p = (5 - \sqrt{5})/2$ is als gewenst (in twee decimalen: 1,38).
Opmerkingen: Dat zou te doen moeten zijn, zelfs exact. Bij deze en de volgende opgave staat een verhaal dat niets toevoegt en zelfs afleidt. Nadat de punten gegeven zijn had men meteen de vraag kunnen stellen.

7 Weer een lang verhaal dat leidt tot de vraag p zó te bepalen dat het zwaartepunt van de drie punten gelijke x- en y-coördinaten heeft, waarbij A en B gewicht 2 krijgen en C gewicht 1. Gevraagd: de exacte waarden van de coördinaten.
Uitwerking: We bepalen $\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OC}$:

$$\frac{2}{5}\begin{pmatrix}5-p\\2p\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2p\\p\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2p+15\\6p+5\end{pmatrix}$$

Coördinaten gelijk stellen geeft $10 = 4p$ of $2p = 5$. Invullen: $(5 + 15)/5 = 4 = (15 + 5)/5$, dus: $(4, 4)$.
Opmerkingen: Niet moeilijk denk ik. Maar het verhaal erbij bevat overbodige en afleidende informatie; de lijn waar de zwaartepunten op liggen speelt geen rol in de opgave.

8 Een punt P beweegt volgens

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) - \cos(3t) \\ y(t) = \cos(t) + \sin(3t) \end{cases} \qquad \text{voor } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Gegeven: op zes tijdstippen bevindt P zich op de y-as. Gevraagd: die tijdstippen (exact).
Uitwerking: We moeten $x(t) = 0$ oplossen, dus $\sin(t) = \cos(3t)$. Daar maken we $\sin(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - 3t)$ van. Deze heeft twee rijen oplossingen: $t = \frac{\pi}{2} - 3t + 2k\pi$ en $t = \pi - (\frac{\pi}{2} - 3t) + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$. De eerste geeft via $4t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ de oplossingen $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, en $\frac{13\pi}{8}$. De tweede geeft via $2t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ de oplossingen $\frac{3\pi}{4}$ en $\frac{7\pi}{4}$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

9 Bij $t = \frac{\pi}{2}$ en $t = \pi$ gaat P door $(1, -1)$; de baan snijdt zichzelf onder een bepaalde hoek. Gevraagd: de hoek in graden (algebraïsch en geheel).
Uitwerking: Bepaal de afgeleiden van x en y:

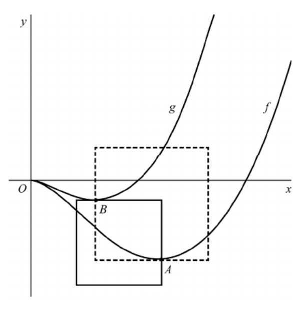
$$\begin{cases} x'(t) = \cos(t) + 3\sin(3t) \\ y'(t) = -\sin(t) + 3\cos(3t) \end{cases}$$

Op tijdstip $\frac{\pi}{2}$ hebben we $\boldsymbol{v}_1 = \binom{-3}{-1}$ als richtingsvector en op tijdstip π hebben we $\boldsymbol{v}_2 = \binom{-1}{-3}$. De cosinus van de hoek is dan

$$\frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\| \cdot \|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{3+3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{5}$$

De hoek is dus gelijk aan $\arccos(\frac{3}{5}) \cdot \frac{180}{\pi} \approx 53{,}13$. In hele graden: 53°.
Opmerkingen: Moet te doen zijn.

10 Twee functies f en g met voorschriften $f(x) = x^2 \cdot \ln(\frac{1}{2}x)$ en $g(x) = x^2 \cdot \ln(x)$. Met een figuur:



Gegeven: A is de top van de grafiek van f en B die van g, en $A = (\frac{2}{\sqrt{e}}, -\frac{2}{e})$. Door A en B kunnen vierkanten getekend worden met zijden evenwijdig aan de x- en y-assen (zie figuur). Gevraagd: de lengte van de zijde van het kleinst mogelijke vierkant (algebraïsch, vier decimalen).

Uitwerking: In ieder geval even B bepalen: $g'(x) = 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x)+1)$. Het enige nulpunt is $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, en dat levert $B = (\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2\mathrm{e}})$. De horizontale zijde van een rechthoek door A en B heeft lengte ten minste $2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ en de lengte van een verticale zijde is ten minste $-\frac{1}{2\mathrm{e}} - (-\frac{2}{\mathrm{e}}) = \frac{3}{2\mathrm{e}}$. Nu is $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ groter dan $\frac{3}{2\mathrm{e}}$, dus de zijden van het kleinst mogelijke vierkant zijn $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ lang. In vier decimalen is dat 0,6065.
Opmerkingen: Met behulp van een rekenmachien wel te doen denk ik. NB $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2\mathrm{e}} = (2\sqrt{\mathrm{e}} - 3)/(2\mathrm{e})$ en dat is positief want $\mathrm{e} > 2\frac{1}{4} = (\frac{3}{2})^2$ en dus $\sqrt{\mathrm{e}} > \frac{3}{2}$.

11 We bekijken $h = g/f$. Gegeven is dat $\lim_{x\to\infty} h(x)$ bestaat. Gevraagd de limiet exact te berekenen.
Uitwerking: Er geldt $f(x) = x^2 \cdot (\ln(x) + \ln(\frac{1}{2})) = x^2(\ln(x) - \ln(2))$. Dus

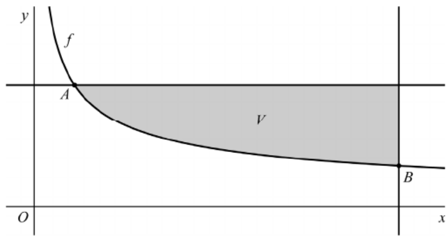
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\ln(x)}{x^2(\ln(x)-\ln(2))} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)-\ln(2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

Opmerkingen: Kennelijk goed te doen (het CV deed precies hetzelfde).

12 Gegeven de fnctie f door $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$. Op de grafiek liggen $A = (1,3)$ en $B = (9,1)$. Gegeven: er is een punt tussen A en B op de grafiek waar de raaklijn dezelfde helling heeft als het lijnstuk AB (zegt de middelwaardestelling ...).

Gevraagd: gehele waarden van p en q zó dat de x-coördinaat van dit punt als $\sqrt[q]{p}$ geschreven kan worden.
Uitwerking: De helling van AB is gelijk aan $\frac{1-3}{9-1} = -\frac{1}{4}$. De afgeleide van f is $f'(x) = 3 \cdot -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$. We krijgen dus $-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}$ op te lossen. Dat kun je omschrijven tot $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$, of $x^{\frac{3}{2}} = 6$. Dus $x = 6^{\frac{2}{3}} = 36^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{36}$ bijvoorbeeld. Neem $q = 3$ en $p = 36$.
Opmerkingen: Wel aardig.

13 We nemen het gebied V begrensd door de grafiek van f, de horizontale lijn door A en de verticale lijn door B.

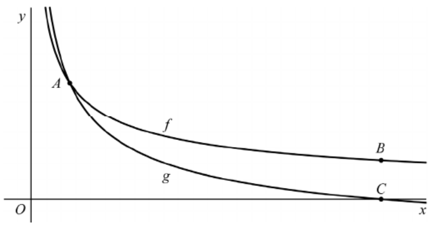


Gevraagd de inhoud van het lichaam dat ontstaat door V om de x-as te wentelen (algebraïsch en geheel).
Uitwerking: WE gebruiken de wentelformule en het feit dat A op hoogte 3 ligt; de inhoed is gelijk aan

$$\pi\int_1^9 3^2 - f(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^9 9 - \frac{9}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\big[9x - 9\ln(x)\big]_1^9 = \pi\big(72 - 9\ln(9)\big)$$

Maple's `evalf` maakt hier 164,0696... van, afgerond 164 dus.
Opmerkingen: Standaard zou ik zeggen.

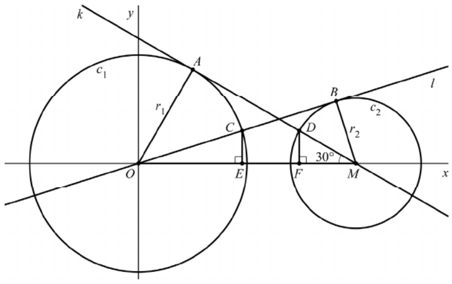
14 Op de grafiek van f worden twee transformaties toegepast; het resultaat staat in de figuur. Hierin is C de projectie van B op de x-as.



Gevraagd: beschrijf de transformaties, in de juiste volgorde.
Uitwerking: Mogelijkheid 1: transleer de grafiek 1 naar beneden, om $B = (9,1)$ naar $C = (9,0)$ te bewegen. Dit transformeert $A = (1,3)$ in $(1,2)$. Vermenigvuldig nu ten opzichte van de x-as met $\frac{3}{2}$ dan blijft C op zijn plaats en $(1,2)$ gaat over in A.

Mogelijkheid 2: vermenigvuldig ten opzichte van de x-as met $\frac{3}{2}$. Dan gaan A en B over in respectievelijk $(1, 4\frac{1}{2})$ en $(9, 1\frac{1}{2})$. Transleer dan $1\frac{1}{2}$ naar beneden; dat brengt $(1, 4\frac{1}{2})$ terug naar A en $(9, 1\frac{1}{2})$ naar C.
Opmerkingen: De opgave gaf aan dat het "op verschillende manieren" kan. Het CV geeft ook allebei. Niet moeilijk.

15 Een som met een heleboel gegevens over de cirkels in dit plaatje:

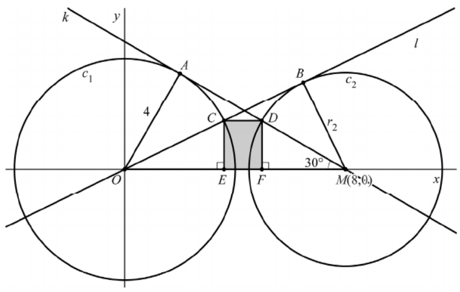


Gegeven: $\angle AMO = 30°$, en de driehoeken OBM en OEC zijn gelijkvormig.
Te bewijzen: $CE = DF = \frac{1}{2}r_2$.
Uitwerking: Dat $DE = \frac{1}{2}r_2$ is duidelijk: $\frac{DE}{r_2} = \sin\angle FMD = \frac{1}{2}$. Verder geldt wegens de gegeven gelijkvormigheid

$$\frac{CE}{r_1} = \frac{BM}{OM} = \frac{r_2}{OM} \text{ en dus } CE = \frac{r_1}{OM} \cdot r_2$$

Maar $\frac{r_1}{OM} = \sin\angle OMA = \sin 30° = \frac{1}{2}$, dus inderdaad volgt ook $CE = \frac{1}{2}r_2$.
Opmerkingen: Door de gegeven gelijkvormigheid redelijk recht voor zijn raap.

16 We nemen $r_1 = 4$ en $M = (8, 0)$. We hebben dankzij de vorige som een rechthoek $EFDC$.



De oppervlakte van $EFDC$ hangt af van r_2. Gegeven: voor één waarde van r_2 is de oppervlakte maximaal. Gevraagd: de maximale oppervlakte (twee decimalen).
Uitwerking: We moeten dus EF nog in r_2 uitdrukken.
Er geldt dat $ME = r_2\cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r_2$. Verder geldt $OE : EC = OB : r_2$ wegens de gegeven gelijkvormigheid, maar $EC = \frac{1}{2}r_2$, dus $OE = \frac{1}{2}OB$. Met behulp van de stelling van Pythagoras volgt dat $OB^2 = OM^2 - r_2^2 = 64 - r_2^2$ en dus $OE = \frac{1}{2}\sqrt{64 - r_2^2}$.
Conclusie: $EF = 8 - \frac{1}{2}\sqrt{64 - r_2^2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r_2$, en de oppervlakte van $EFDC$ is dus gelijk aan

$$4r_2 - \frac{1}{4}r_2 \cdot \sqrt{64 - r_2^2} - \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot r_2^2$$

De afgeleide hiervan naar r_2 is gelijk aan

$$4 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r_2 + \frac{2r_2^2 - 64}{4\sqrt{64 - r_2^2}}$$

Als we dit gelijkstellen aan 0 en wat manipulaties uithalen kunnen we hier

$$(16 - 2\sqrt{3} \cdot r_2)^2(64 - r_2^2) = (64 - 2r_2^2)^2$$

van maken, een vierdegraadsvergelijking dus. Maple's `fsolve` geeft $r_2 \approx 2{,}73616$ als oplossing en 2,56056 als benadering van de oppervlakte. In twee decimalen 2,56 dus.
Opmerkingen: Aardige som, op het eind na: als de formule gevonden is komt het maximum uit een zwarte doos.