1000^{1001} **VERSUS** 1001^{1000}

K. P. HART

SAMENVATTING. De vraag; wie is groter 1000^{1001} of 1001^{1000} kan op veel manieren beantwoord worden. Dit artikel toont er zes.

INLEIDING

Op het web doet de laatste tijd de volgende vraag de ronde: welk getal is groter: 1000^{1001} of 1001^{1000}?
In dit artikel zullen we zien dat dit probleem op met diverse soorten voorkennis aangepakt kan worden. Achtereenvolgens bekijken we

(1) Rekenmachientje: neem links en rechts de duizendstemachtswortel en vergelijk $1000^{1,001}$ met 1001. Dank aan Frank Boers (via 'Leraar Wiskunde' op Facebook).
(2) Logaritmen en rekenmachientje: de logaritmen (basis 10) kunnen eenvoudig vergeleken worden en we krijgen informatie over het aantal cijfers in beide machten.
(3) Natuurlijke logaritmen en integralen: de natuurlijke logaritmen van de machten kunnen, met een beroep op een eenvoudige eigenschap van de integraal 'met de hand' vergeleken worden.
(4) Binomium van Newton: schrijf $(1000+1)^{1000}$ uit met behulp van het binomium en laat zien dat de termen in de som steeds groter worden; hiermee is de macht snel af te schatten.
(5) Binomium van Newton (bis): het quotient van $(1000+1)^{1000}$ en 1000^{1001} is met behulp van het binomium af te schatten met $3/1000$.
(6) Het getal e: met behulp van een definierende rij voor e kan de vorige afschatting verbeterd worden tot $\mathrm{e}/1000$.
(7) Functieonderzoek: in het algemeen geldt: als $\mathrm{e} < x < y$ dan $y^x < x^y$. Dit volgt door de functie $x/\ln x$ te bekijken. Dank aan René Pannekoek.
(8) Gebruik de e-macht: via $\mathrm{e}^x > 1 + x$ vind je $1000^{1+\frac{1}{1000}} > 1000 + \ln 1000$.

1. REKENMACHIENTJE (FRANK BOERS)

De machten zijn te groot om direct in een rekenmachientje te stoppen; de uitkomsten kunnen niet weergegeven worden. Maar ..., je kunt de getallen temmen door de duizendstemachtswortels te nemen. De vraag wordt dan wie groter is: $1000^{1+\frac{1}{1000}}$ of 1001.
Een rekenmachientje geeft dat $1000^{1,001} \approx 1006.93$.

Date: Friday 07-07-2017 at 12:07:23 (cest).

2. Logaritmen

De machten zijn te groot om direct in een rekenmachientje te stoppen; de uitkomsten kunnen niet weergegeven worden. Maar ..., je kunt de getallen temmen met behulp van logaritmen (basis 10): neem de logaritme van beide getallen. Ten eerste:

$$\log 1000^{1001} = 1001 \cdot \log 1000 = 3003$$

en ten tweede

$$\log 1001^{1000} = 1000 \cdot \log 1001 = 1000(\log 1000 + \log 1{,}001) = 3000 + 1000 \cdot \log 1{,}001$$

Het gaat er kennelijk om of $1000 \cdot \log 1{,}001$ groter of kleiner is dan 3. Maple (of een rekenmachientje) geeft uitsluitsel: $1000 \cdot \log 1{,}001 \approx 0{,}434$ en dat zegt genoeg.
We hebben gevonden $\log 1000^{1001} = 3000 + 3$ en $\log 1001^{1000} \approx 3000 + 0{,}434$. Wat die logaritmen ons zeggen is dus dat 1000^{1001} een getal van 3004 cijfers is (een 1 en 3003 nullen); daarentegen is 1001^{1000} een getal van 3001 cijfers: $10^{0.434}$ is iets minder dan 3, dus de macht is kleiner dan 3×10^{3000}.

3. Natuurlijke Logaritmen

We kunnen ook met natuurlijke logaritmen werken. We krijgen dan niet altijd mooie ronde getallen als uitkomst maar we kunnen het rekenmachientje uit laten. De natuurlijke logaritmen van onze machten zijn nu

$$1001 \cdot \ln 1000 = 3003 \ln 10 = 3000 \ln 10 + 3 \ln 10$$

en

$$1000 \cdot \ln 1001 = 1000(\ln 1000 + \log 1{,}001) = 3000 \ln 10 + 1000 \cdot \ln 1{,}001$$

Nu rest de vraag of $1000 \cdot \ln 1{,}001$ groter of kleiner is dan $3 \ln 10$.
Het aardige is dat je hier kunt gebruiken dat $\ln(1+x)$ een primitieve is van $(1+x)^{-1}$, of beter:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}\,t$$

Merk op dat $(1+t)^{-1}$ op het interval $[0, x]$ niet groter is dan 1, en dus

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}\,t = x$$

Pas dit toe met $x = 0{,}001$, dan volgt $1000 \cdot \ln 1{,}001 \leqslant 1$.
Aan de andere kant: $\ln 10 > 2$, want $\mathrm{e}^2 < 3^2 < 10$, dus $3 \ln 10$ is groter dan 6.

4. Binomium van Newton

Je kunt ook proberen 1001^{1000} uit te schrijven, maar dan enigszins met beleid: gebruik het Binomium van Newton.

$$(1+1000)^{1000} = \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} 1000^k \qquad (*)$$

In dit geval is elke term groter dan of gelijk aan de voorgaande:

$$\frac{\binom{1000}{k+1} 1000^{k+1}}{\binom{1000}{k} 1000^k} = \frac{1000! \cdot 1000^{k+1} \cdot k! \cdot (1000-k)!}{(k+1)! \cdot (1000-k-1)! \cdot 1000! \cdot 1000^k}$$

Streep zoveel mogelijk weg, er komt:

$$\frac{1000 \cdot (1000-k)}{k+1}$$

Trek teller en noemer van elkaar af:

$$1000^2 - 1 - 1001k = 1001 \cdot (999-k)$$

Voor elke k is dit niet-negatief (want $0 \leqslant k \leqslant 999$).
Kijk nu naar de som in $(*)$, elke term is niet groter dan de laatste en dat is 1000^{1000}; zet de eerste twee apart:

$$1+1000+\sum_{k=2}^{1000}\binom{1000}{k}1000^k \leqslant 1+1000+999\cdot 1000^{1000} < 1000^{1000}+999\cdot 1000^{1000} = 1000^{1001}$$

5. Binomium van Newton (bis)

In plaats van naar de machten afzonderlijk te bekijken kun je ze ook op elkaar delen:

$$\frac{1001^{1000}}{1000^{1001}} = \left(\frac{1000+1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1000}$$

We schrijven de duizendste macht uit volgens het Binomium van Newton:

$$\sum_{k=0}^{1000}\binom{1000}{k}\frac{1}{1000^k}$$

Bekijk een term en werk hem uit:

$$\binom{1000}{k}\frac{1}{1000^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1000!}{(1000-k)!}\frac{1}{1000^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1000}{1000}\cdot\frac{999}{1000}\cdots\frac{1000-k+1}{1000}$$

Dat is duidelijk niet groter dan $1/k!$. We zien dat

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \leqslant \sum_{k=0}^{1000}\frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{999} 2^{-k} = 3 - 2^{-999} < 3$$

(immers voor $k \geqslant 1$ geldt $k! \geqslant 2^{-(k-1)}$). Dus volgt

$$\frac{1001^{1000}}{1000^{1001}} < \frac{3}{1000}$$

6. Een rij voor e

De meest geziene oplossing was deze:

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} < \mathrm{e}$$

en dus

$$\frac{1001^{1000}}{1000^{1001}} < \frac{\mathrm{e}}{1000}$$

Dit berust op de kennis dat

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

en dat de gebruikte rij stijgend is.

7. Functieonderzoek (René Pannekoek)

Als je naar de natuurlijke logaritmen van de machten kijkt zie je dat de vraag of $1001 \ln 1000$ groter/kleiner is dan $1000 \ln 1001$ equivalent is aan de vraag of $1001/\ln 1001$ groter/kleiner is dan $1000/\ln 1000$.
Dit wijst in de richting van de functie f, gegeven door $f(x) = x/\ln x$. We nemen het interval $(1, \infty)$ als domein en bepalen de afgeleide van f.

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Hieruit blijkt dat f dalend is op $(1, \mathrm{e}]$ en stijgend op $[\mathrm{e}, \infty)$.
Nu kunnen we snel concluderen dat voor $y > x > \mathrm{e}$ geldt dat

$$\frac{x}{\ln x} < \frac{y}{\ln y}$$

ofwel

$$x \ln y < y \ln x$$

en dus ook

$$\ln y^x < \ln x^y$$

Conclusie: als $\mathrm{e} < x < y$ dan $y^x < x^y$.
In het bijzonder dus $1001^{1000} < 1000^{1001}$.

8. Gebruik de e-macht

Bekijk nogmaals $1000^{1+\frac{1}{1000}}$ en schrijf deze als $1000 \cdot 1000^{\frac{1}{1000}}$. De tweede macht kun je met behulp van de e-macht en de natuurlijke logaritme herschrijven als

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln 1000}{1000}}$$

Voor de e-macht geldt de volgende ongelijkheid:

$$\mathrm{e}^x > 1 + x \qquad (x \neq 0)$$

vergelijk de grafiek van e^x met de raaklijn aan de grafiek in $(0, 1)$. Hiermee is $1000^{1+\frac{1}{1000}}$ te onderschatten:

$$1000 \cdot 1000^{\frac{1}{1000}} > 1000 \left(1 + \frac{\ln 1000}{1000}\right) = 1000 + \ln 1000$$

en $\ln 1000 > \ln \mathrm{e} = 1$, dus we zijn klaar.