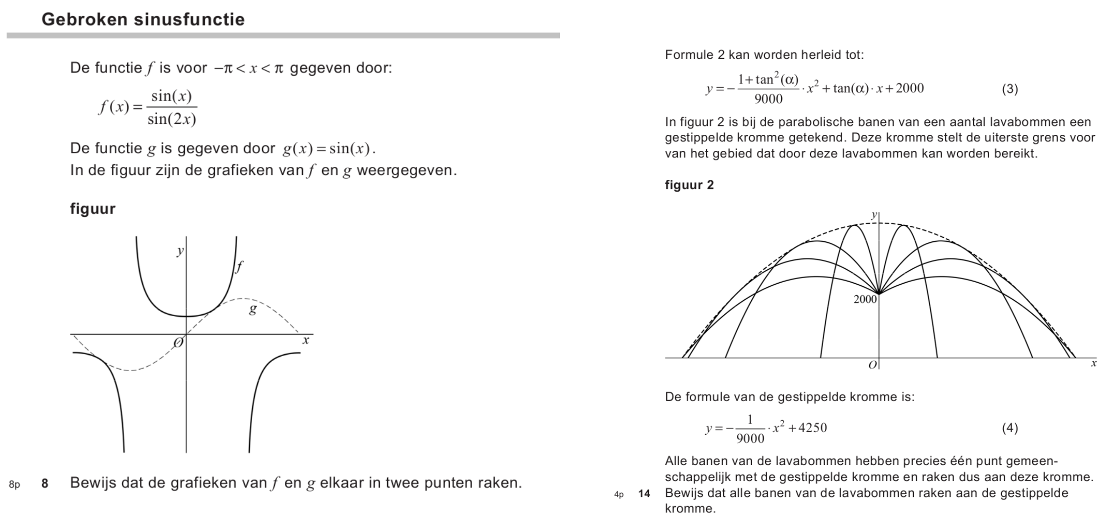
RAKEN OF NIET RAKEN, DAT IS DE VRAAG

KLAAS PIETER HART

Inleiding

Op een paar sociale media raakte ik betrokken in discussies over twee opgaven uit het Centraal Schriftelijk Examen Wiskunde B, vwo, van 20 mei 2022.
Het gaat om opgaven 8 en 14. Ik geef ze hier maar integraal weer. NB Opgave 8 en de inleiding zijn geheel


Gebroken sinusfunctie

De functie f is voor $-\pi < x < \pi$ gegeven door:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$$

De functie g is gegeven door $g(x) = \sin(x)$.
In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur

8p 8 Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar in twee punten raken.

Formule 2 kan worden herleid tot:

$$y = -\frac{1+\tan^2(\alpha)}{9000}\cdot x^2 + \tan(\alpha)\cdot x + 2000 \qquad (3)$$

In figuur 2 is bij de parabolische banen van een aantal lavabommen een gestippelde kromme getekend. Deze kromme stelt de uiterste grens voor van het gebied dat door deze lavabommen kan worden bereikt.

figuur 2

De formule van de gestippelde kromme is:

$$y = -\frac{1}{9000}\cdot x^2 + 4250 \qquad (4)$$

Alle banen van de lavabommen hebben precies één punt gemeenschappelijk met de gestippelde kromme en raken dus aan deze kromme.

4p 14 Bewijs dat alle banen van de lavabommen raken aan de gestippelde kromme.

Figuur 1. Opgaven 8 en 14

te zien; opgave 14 werd nog voorafgegaan door een bladzijde tekst over lavabommen en twee opgaven over de banen van die bommen. Voor opgave 14 is het alleen van belang vergelijkingen (3) en (4) te kennen.

1. Raken

De discussies, op Facebook en Twitter, gingen over het begrip 'rakende grafieken' en over een afdoende bewijs van een bewering dat de grafieken van twee functies elkaar raken.
Om te beginnen: wat betekent het dat de grafieken van twee functies elkaar raken? In de syllabus van het vak (`https://edu.nl/b8p6y`) wordt daar met geen woord over gerept.
De uitwerking van opgave 8 in het correctievoorschrift gebruikt dat de x-coördinaten van de raakpunten moeten voldoen aan de vergelijkingen $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.
Voor opgave 14 geeft het voorschrift twee uitwerkingen; de tweede daarvan gebruikt hetzelfde criterium. Over de andere uitwerking was nog meer te doen, daar kom ik straks op terug.
De discussie ging vooral over "is dit genoeg?". Immers, volgens dit criterium raken de grafieken van $f(x) = x^3$ en $g(x) = -x^3$ elkaar in $(0, 0)$ terwijl ze daar toch wel onderling van positie (onder-boven en boven-onder) wisselen. Bij 'echt' raken zou dat niet mogen gebeuren.
Zou dat echt? Je ziet hier een probleem dat zich bij vrijwel elke wiskundige definite voordoet: er zijn altijd gevallen die zich niet gedragen zoals jij dat zou willen. Ook minder verdachte krommen, zoals de grafieken van $y = \frac{1}{x^2+1}$ en $y = e^{-x^2}$ vertonen 'ongewenst' gedrag. Immers deze krommen hebben ook buigpunten en daar wisselen kromme en raaklijn van positie.

Date: donderdag 15-09-2022 at 09:27:33 (cest).

Waar komt de eis op de functiewaarden en de afgeleiden vandaan? Die eis komt van een poging het fenomeen raken kwantitatief vast te leggen. In *Van Dale* bijvoorbeeld staat dit over raken:

> *meetkunde*: gezegd van een rechte en een kromme of van twee krommen die twee samenvallende snijpunten gemeen hebben

Dat is een poging het plaatje dat bijna iedereen in het hoofd heeft te beschrijven: als twee cirkels elkaar in twee punten snijden en we bewegen ze uit elkaar dan gaan die snijpunten naar elkaar toe en op het moment dat snijden in niet snijden overgaat vallen die twee snijpunten samen en raken de cirkels elkaar. Analytisch kun je daar nog niet zoveel mee maar als je steeds beter naar het raakpunt kijkt zie je dat de afstand tussen de krommen zeer snel naar nul convergeert. Sneller dan elke eerstegraadsfunctie en dat is de sleutel: als het raakpunt optreedt bij $x = a$ dan moet

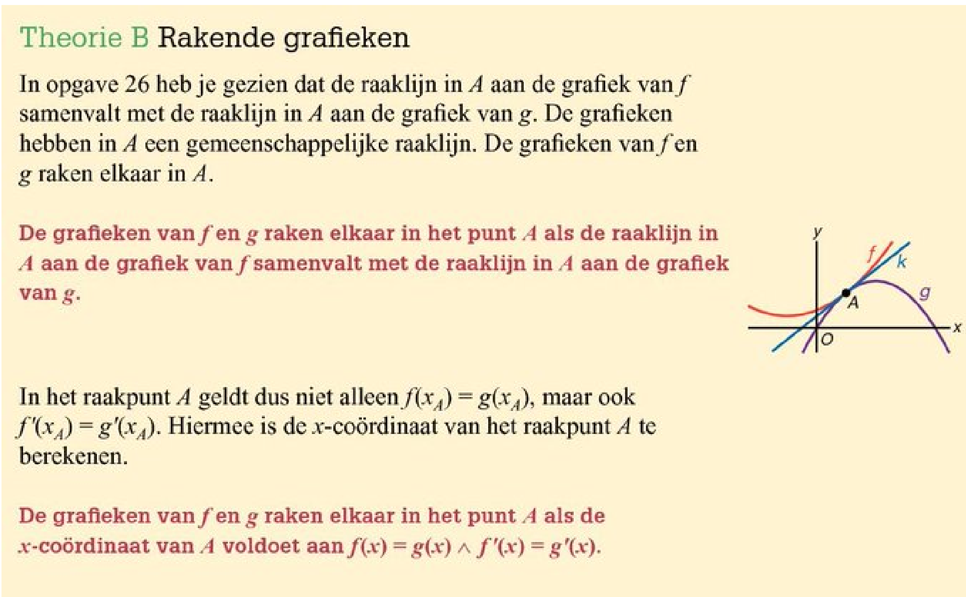
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

gelden. Als f en g differentieerbaar zijn in a dan is dit equivalent aan de twee eisen $f(a) = g(a)$ en $f'(a) = g'(a)$.
Als de functies twee keer differentieerbaar zijn met continue tweede afgeleide kun je met behulp van de stelling van Taylor het verschil $f(x) = g(x)$ schrijven als

$$\frac{f''(c_x) - g''(d_x)}{2}(x - a)^2$$

waarbij c_x en d_x tussen x en a liggen. Wegens de continuïteit van de tweede afgeleiden kun je de absolute waarde $\bigl|f''(c_x) - g''(d_x)\bigr|$ nabij a afschatten met een constante M (bijvoorbeeld $M = |f''(a)| + |g''(a)| + 1$). Dat levert dan de analytische vertaling van “twee samenvallende oplossingen gemeen hebben” in de zin dat de bovengrens $M(x - a)^2$ van het verschil in a een dubbel nulpunt heeft.
Dat deze eis ook elkaar kruisende krommen toelaat is jammer maar in de toepassingen niet echt erg. Het feit dat de lineariseringen overeenkomen is belangrijker dan het verdere onderlinge gedrag van de functies.

Ten slotte. Nadat ik bovenstaande had opgeschreven plaatste Karin den Heijer het plaatje in Figuur 2


Theorie B Rakende grafieken

In opgave 26 heb je gezien dat de raaklijn in A aan de grafiek van f samenvalt met de raaklijn in A aan de grafiek van g. De grafieken hebben in A een gemeenschappelijke raaklijn. De grafieken van f en g raken elkaar in A.

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de raaklijn in A aan de grafiek van f samenvalt met de raaklijn in A aan de grafiek van g.

In het raakpunt A geldt dus niet alleen $f(x_A) = g(x_A)$, maar ook $f'(x_A) = g'(x_A)$. Hiermee is de x-coördinaat van het raakpunt A te berekenen.

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de x-coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.

Figuur 2. Rakende grafieken in Getal en Ruimte

op Twitter. Duidelijk genoeg lijkt me; en de discussie op Facebook had niet zo lang hoeven duren: dit is wat de leerlingen geleerd (zouden moeten) hebben en zo laat je zien dat grafieken van functies elkaar raken.
Wie geen kruisingen wil moet de definitie aanscherpen, bijvoorbeeld door te eisen dat $f(x) - g(x)$ op een interval rond a tekenvast is. Maar dat zou in opgave 8 meer werk voor de leerlingen betekenen. In opgave 14 niet noodzakelijk; daar gaan we het nu over hebben.

2. Tweedegraadsfuncties

In het correctievoorschrift voor opgave 14 worden twee oplossingen besproken (of beter: van deelpunten voorzien). Laten we de functies die hier een rol spelen even als $y_3(x)$ en $y_4(x)$ noteren.

Tweede oplossing. De tweede oplossing is als die van Opgave 8: zoek punten waar $y_3(x) = y_4(x)$ en $y_3'(x) = y_4'(x)$. De vergelijking $y_3'(x) = y_4'(x)$ is eerstegraads en van de enige oplossing daarvan, zeg a, volgt na invullen dat ook $y_3(a) = y_4(a)$, klaar dus. Door de overal aanwezige $\tan\alpha$ en de grote getallen als 9000 en 4500 ziet het er misschien wat onoverzichtelijk uit, maar het werkt.

Eerste oplossing. De eerste oplossing herleidt $y_3(x) = y_4(x)$ tot de volgende tweedegraadsvergelijking:

$$\frac{(x\tan\alpha)^2}{9000} - (x\tan\alpha) + 2250 = 0$$

In het voorschrift rekent men de discriminant van deze vergelijking uit: $D = \tan^2\alpha - \tan^2\alpha = 0$. En daar stopt de oplossing, met tussen haakjes de mededeling (dus heeft elke parabool precies één punt gemeenschappelijk met de gestippelde kromme).
Daar vielen enige medetwitteraars over: hoezo is dit genoeg? Waarom is dat ene punt ook nog een raakpunt? En vooral: zou dit ooit bij een leerling op kunnen komen?
Die laatste vraag kan ik niet beantwoorden, maar die eerste vragen wel. En die vragen zijn legitiem.

Wat de eerste vraag betreft: nee, het is niet genoeg, niet als ik terugdenk aan hoe ik vroeger de *abc*-formule gebruikte. "Als de discriminant nul is is er één oplossing" luidde de mantra. De mededeling tussen haakjes klopt dus, maar die ene oplossing levert nog niet noodzakelijk een raakpunt, niet voor een leerling die bij de mantra uit de vorige zin leeft. En het is een koud kunstje twee parabolen te maken die elkaar in één punt snijden maar elkaar in dat punt niet raken.

Daarvoor moet de tweede vraag beantwoord worden. Het antwoord op die vraag zit verstopt in de afleiding van de *abc*-formule en wel in de opmerking dat *als* de discriminant, $b^2 - 4ac$, van een 'echte' tweedegraadsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, met $a \neq 0$ dus, gelijk is aan 0, *dan* is de vergelijking te schrijven als $a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ en deze heeft dus een dubbele oplossing ($x = -\frac{b}{2a}$). Een betere mantra zou dus zijn: "als de discriminant nul is zijn er twee samenvallende oplossingen".
In het geval van opgave 14 zou in het correctievoorschrift al heel wat gewonnen zijn als tussen de haakjes had gestaan (elke parabool heeft twee samenvallende punten gemeen met de gestippelde kromme) (en als tevens vermeld was dat die gestippelde kromme ook een parabool is want de methode werkt alleen met tweedegraadskrommen).

Een betere uitwerking, die die mantra expliciet maakt krijg je als je het verschil $y_4(x) - y_3(x)$ uitwerkt:

$$\begin{aligned} y_4(x) - y_3(x) &= \frac{(x\tan\alpha)^2}{9000} - (x\tan\alpha) + 2250 \\ &= \frac{1}{9000}(x\tan\alpha - 4500)^2 \end{aligned}$$

Nemen we nu $a = \frac{4500}{\tan\alpha}$ dan zien we meteen dat $y_4(a) - y_3(a) = 0$ en $y_4'(a) - y_3'(a) = 0$, er is dus een raakpunt bij $x = a$. En voor de puristen: we hebben een 'echt' raakpunt want $y_4(x) - y_3(x) > 0$ voor $x \neq \frac{4500}{\tan\alpha}$

Ten slotte. Op de formulering van opgave 14 is wel wat af te dingen. De zin vlak voor de opgave is nogal sturend:

> Alle banen van de lavabommen hebben precies één punt gemeenschappelijk met de gestippelde kromme en raken dus aan deze kromme.

En dan bestaat opgave 14 uit de opdracht te bewijzen dat dat raken inderdaad gebeurt.
Het lijkt erop dat de som met de eerste oplossing in het achterhoofd is geformuleerd. Maar, zoals boven beschreven, die oplossing doet te veel beroep op impliciete kennis van tweedegraadskrommen en hun snij- en raakgedrag.

Nog iets over raken: dat is een lokaal verschijnsel. Alleen het gedrag van de twee rakende objecten in de buurt van het raakpunt is van belang. Dat maakt de hierboven geciteerde zin niet handig; twee krommen kunnen elkaar best in het ene punt raken en in het andere punt snijden zonder te raken.
Zie bijvoorbeeld *Raken en snijden* van Jan Otto Kranneborg in Euclides **93** (7) (juni 2018) 24–26. Daar biedt de sinusfunctie al voldoende stof tot nadenken.

3. Omhullende kromme

Een bekend verschijnsel: vraag een leerling of een student of iets een oplossing van een vergelijking is en deze gaat de vergelijking oplossen, en dan kijken of het gegeven object bij de oplossingen staat.
Een andere twitteraar vroeg zich daarom af of de leerlingen formule (4) ook moesten afleiden, en zo ja hoe dan?
Antwoord op het eerste deel: nee. De kromme was gegeven, men moest alleen laten zien dat hij de gewenste eigenschap heeft.
Antwoord op het tweede deel: dat is eigenlijk niet zo moeilijk, maar je moet wel wat over functies van meer variabelen weten.
Vervang in (3) de $\tan\alpha$ even door één letter, zeg t en breng alles naar één kant:

$$y + \frac{1+t^2}{9000}x^2 - t \cdot x - 2000 = 0 \tag{$*$}$$

Deze vergelijking bepaalt nu een oppervlak in $\mathbb{R}^3$, en onze parabolen zijn niveaukrommen van dat oppervlak: de parabool bij een vaste t vinden we door het oppervlak op hoogte t door te snijden.
Noteer de linkerkant even als $F(t, x, y)$, deze functie van drie variabelen is een polynoom en dus continu differentieerbaar. Stel nu dat (a, b) op de kromme horend bij t_0 ligt, dus $F(t_0, a, b) = 0$. Als de partiële afgeleide $\frac{\partial}{\partial t}F(t_0, a, b)$ ongelijk aan 0 is garandeert de Impliciete-Functiestelling dat er op een (kleine) cirkelschijf D om (a, b) een continu differentieerbare functie f bestaat zó dat $F\bigl(f(x, y), x, y\bigr) = 0$ voor $(x, y) \in D$; elk punt in D ligt dus op een van de krommen.
Maar dat betekent dat (a, b) niet op de gestippelde kromme kan liggen: als (c, d) op de gestippelde kromme ligt zijn er in elk klein schijfje om (c, d) punten die op geen enkele kromme liggen, namelijk de punten binnen het schijfje maar boven de kromme.

Dus, de punten op de gestippelde kromme moeten aan twee vergelijkingen voldoen: $F(t, x, y) = 0$ en $\frac{\partial}{\partial t}F(t, x, y) = 0$. De tweede vergelijking wordt

$$\frac{2tx^2}{9000} - x = 0 \text{ of } x\left(\frac{2tx}{9000} - 1\right) = 0$$

met als oplossing: $x = 0$ of $tx = 4500$. De oplossing $x = 0$ komt overeen met een lavabom die recht omhoog gaat en daar hebben we niets aan. We stoppen $tx = 4500$ in vergelijking ($*$):

$$y + \frac{x^2}{9000} + \frac{4500^2}{9000} - 4500 - 2000 = 0$$

en dat levert vergelijking (4) in het examen:

$$y = -\frac{x^2}{9000} + 4250$$

Faculteit EWI, TU Delft, Postbus 5031, 2600 GA Delft
Email address: `k.p.hart@tudelft.nl`
URL: `http://fa.ewi.tudelft.nl/~hart`