EINDEXAMEN WISKUNDE 1, VWO, 1975

1 De functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is gegeven door $f: x\mapsto \frac{2+2\ln x}{x}$.

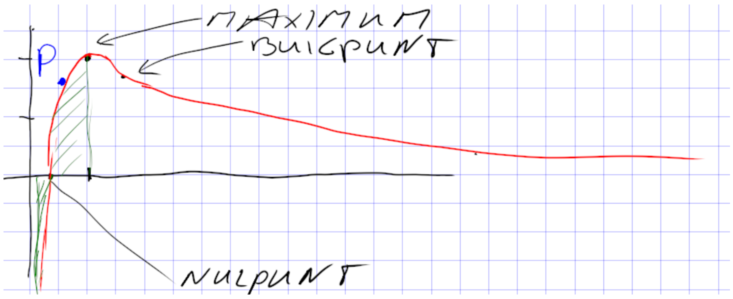
a. Onderzoek f en teken de grafiek van f. Bereken de cördinaten van het buigpunt van de grafiek van f.

b. De raaklijn in een punt P aan de grafiek van F gaat door de oorsprong $(0,0)$.

c. De oppervlakte van het gesloten vlakdeel, begrensd door de grafiek van f, de x-as, en de lijn $x=p$ is gelijk aan 1. Bereken p.

Uitwerking:

a. De functie is gedefinieerd op $(0,\infty)$. De vergelijking $f(x)=0$ oplossen leidt tot $\ln x=-1$, en dus $x=\mathrm{e}^{-1}$. De functie is negatief op $(0,\mathrm{e}^{-1})$ en positief op (e^{-1},∞).
Voor de extremen: $f'(x)=(0+\frac{2}{x})\frac{1}{x}+(2+2\ln x)\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{2\ln x}{x^2}$. Het enige nulpunt van f' is $x=-1$; verder is $f'(x)$ positief voor $x<1$ en negatief voor $x>1$, dus $f(1)=2$ is een globaal maximum.
Asymptoten: horizontaal $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, de x-as dus. Verticaal $\lim_{x\downarrow 0} f(x)=-\infty$: de (negatieve) y-as.
Het buigpunt: $f''(x)=-\frac{2}{x^3}(1-2\ln x)$, met nulpunt $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ en in dat nulpunt hebben we tekenwisseling, dus $(\sqrt{\mathrm{e}},3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ is een buigpunt.



b. In het punt $P=(a,f(a))$ moet de helling gelijk zijn aan $f(a)/a$; we moeten dus $f'(a)=f(a)/a$ oplossen, of $-2\ln a=2+2\ln a$ (deel a^2 weg), en dus $2+4\ln a=0$, met oplossing $a=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. Dus $P=(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})$.

c. Er zijn twee mogelijkheden $p<\mathrm{e}^{-1}$ of $p>\mathrm{e}^{-1}$; beide leveren dezelfde vergelijking. Immers, als $p<\mathrm{e}^{-1}$ willen we $\int_p^{\mathrm{e}^{-1}} f(x)\,\mathrm{d}x=-1$ en als $p>\mathrm{e}^{-1}$ willen we $\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x=1$. Via $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2\ln x+\ln^2 x$ vinden we in beide gevallen $\ln^2 p+2\ln p+1=1$, of $(2+\ln p)\ln p=0$, met oplossingen $\ln p=0$, met $p=1$, of $\ln p=-2$, met $p=\mathrm{e}^{-2}$.

Opmerkingen:

2 Gegeven is de differentiaalvergelijking $x\,\mathrm{d}y-3y\,\mathrm{d}x=u(x)\,\mathrm{d}x$, waarbij u een op $\mathbb{R}$ gedefinieerde, differentieerbare functie is.

a. Voor welke functies u geldt dat $y=u(x)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking is?

b. Als de functie f een oplossing van de differentiaalvergelijking is, dan is voor elke $c\in\mathbb{R}$ de functie $g: x\mapsto f(x)+cx^3$ ook een oplossing van de differentiaalvergelijking. Bewijs dit.

c. Neem $u(x)=6x$. De verzameling van de punten waarvan het door de differentiaalvergelijking gedefinieerde lijnelement een richtingscoëfficiënt p heeft, is een integraalkromme van de differentiaalvergelijking. Bereken p.

Uitwerking:

a. Vul $y=u(x)$ in de differentiaalvergelijking in, $x\,\mathrm{d}u(x)-3u(x)\,\mathrm{d}x=u(x)\,\mathrm{d}x$, en werk uit, er komt: $x\cdot u'(x)=4u(x)$. Deze differentiaalvergelijking heeft oplossingen $u(x)=Cx^4$: scheid de variabelen, $\frac{1}{u}u'=\frac{4}{x}$, dus $\ln|u|=4\ln|x|+c$, of $|u|=Cx^4$. In feite is de oplossingsverzameling nog rijker:

$$u(x)=\begin{cases} cx^4 & x\leqslant 0\\ dx^4 & x\geqslant 0\end{cases}$$

met c en d onafhankelijk te kiezen constanten.

b. Als je cx^3 links invult komt er $x \cdot 3cx^2\,\mathrm{d}x - 3cx^3\,\mathrm{d}x = (3cx^3 - 3cx^3)\,\mathrm{d}x = 0$. Dus invullen van $f(x) + cx^3$ in de hele vergelijking levert hetzelfde resultaat als alleen $f(x)$ invullen: rechts $u(x)\,\mathrm{d}x$ en links $x\,\mathrm{d}(f(x)+cx^3) - (3f(x)+3cx^3)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}f(x) - 3f(x)\,\mathrm{d}x$. Dus als f een oplossing is is g het ook.

c. Nu bekijken we dus $x\,\mathrm{d}y - 3y\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x$, of $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y = 6x$. De eis in de opgave beteken dat $y = px$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking is. Vul in: $px - 3px = 6x$, dus $(-2p-6)x = 0$ voor alle x. En dus $2p = -6$ of $p = -3$.

Opmerkingen: Interessant; ik zou echt niet meer weten hoe ik dit toen heb opgelost.

3 De kromme K is gegeven door $x = t^2$ en $y = t^2 \cdot \mathrm{e}^{1-t}$.

a. De lijn $x = 1$ snijdt K in de punten A en B. Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A en die van de raaklijn in B.

b. Voor welke a heeft de lijn $y = ax$ slechts één punt met K gemeen?

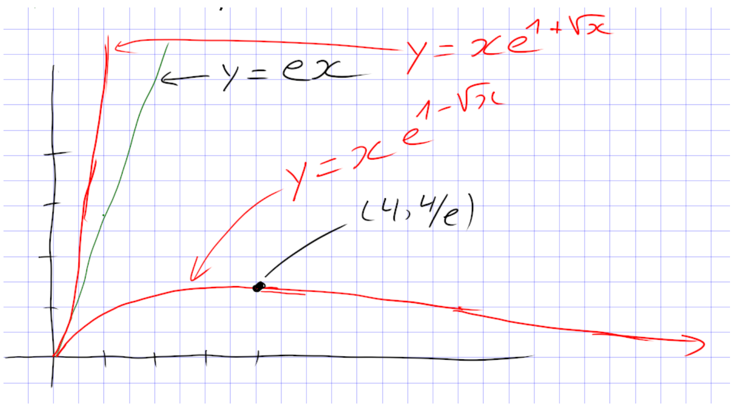
c. In welk punt van K is de raaklijn evenwijdig aan de x-as? Stel een vergelijkiing op van de asymptoot van K. Teken K.

Uitwerking:

a. Eerst A en B bepalen: $x = 1$ geeft $t^2 = 1$, dus $t = -1$ of $t = 1$. Bij $t = -1$ hebben we $A = (1, \mathrm{e}^2)$, en bij $t = 1$ hebben we $B = (1, 1)$. Differentiëren: $x'(t) = 2t$ en $y'(t) = 2t\mathrm{e}^{1-t} - t^2\mathrm{e}^{1-t} = (2t - t^2)\mathrm{e}^{1-t}$. Invullen: bij A komt $y'(-1)/x'(-1) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^2$, bij B krijgen we $\frac{1}{2}$.

b. Voor elke a ligt $(0,0)$ op de kromme en op de lijn $y = ax$. Verder ligt de kromme in het eerste kwadrant, dus voor alle negatieve a is $(0,0)$ het enige snijpunt van K en $y = ax$.
Voor $a \geqslant 0$ levert snijden van K en $y = ax$ de vergelijking $t^2\mathrm{e}^{1-t} = at^2$ of $t^2(\mathrm{e}^{1-t} - a) = 0$ op. Met oplossing $t = 0$ en $t = 1 - \ln a$. Als $a = 0$ valt $1 - \ln a$ af en hebben we ook alleen $t = 0$; als $a > 0$ hebben we twee oplossingen *behalve* bij $a\mathrm{e}$, dan is $t = 0$ een dubbele opossing.
Samengevat: voor $a \leqslant 0$ en voor $a = \mathrm{e}$ heeft $y = ax$ één snijpunt met K.

c. De raaklijn is evenwijdig aan de x-as als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $\mathrm{e}^{1-t} \cdot t \cdot (2-t) = 0$ en $2t \neq 0$. Dat levert $t = 2$ en het punt $(4, 4/\mathrm{e})$.
Er geldt $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ en $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, dus de (positieve) x-as is een asymptoot van K, met vergelijking $y = 0$. Aan de andere kant zijn $\lim_{t\to-\infty} x(t)$, $\lim_{t\to-\infty} x(t)$, en $\lim_{t\to-\infty} y(t)/x(t)$ alledrie gelijk aan ∞, dus er is geen verticale of scheve asymptoot.
Er geldt $x'(0) = y'(0) = 0$ en $\lim_{t\to 0} y'(t)/x'(t) = \mathrm{e}$. Als $t < 0$ dan geldt $y(t) > \mathrm{e} \cdot x(t)$, en als $t > 0$ dan $y(t) < \mathrm{e} \cdot x(t)$. Dus K vertrekt uit $(0,0)$ met een helling van e; voor $t > 0$ onder de lijn $y = \mathrm{e}x$ en voor $t < 0$ boven de lijn $y = \mathrm{e}x$. Men kan K ook zien als de vereniging van de grafieken van $y = x\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$ en $y = x\mathrm{e}^{1+\sqrt{x}}$.



Opmerkingen: Mooie opgave.

4 De functie $f : [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}$ is gegeven door : $x \mapsto \sqrt{1 - \sin x}$.

a. Los op $f(x) = \sin x + \cos x$.

b. Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ aan de grafiek van f.

c. Op de grafiek van f ligt een punt P met x-coördinaat p. De lijn door P, loodrecht op de raaklijn aan de grafiek van f in P, snijdt de x-as in punt A. De projectie van P op de x-as is punt B. Bewijs dat de x-coördinaat van A is $p - \frac{1}{2}\cos p$. Bereken de maximale oppervlakte van driehoek ABP.

Uitwerking:

a. Begin met $\sqrt{1-\sin x} = \sin x + \cos x$ en kwadrateer: $1-\sin x = 1+2\sin x\cos x$ of $0 = \sin x(2\cos x+1)$. Op het gegeven interval levert $\sin x = 0$ de oplossing $x = \pi$, en $2\cos x + 1 = 0$ levert $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = \frac{4}{3}\pi$. Maar, na invullen blijft alleen $x = \frac{2}{3}\pi$ over.

b. We bepalen $\lim_{x\downarrow\frac{1}{2}\pi} f'(x)$. Er geldt $f'(x) = -\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}$ en

$$-\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}} = \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{-\cos x\cdot\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x}$$

want $\cos x < 0$ op het interval, dus $\sqrt{1-\sin^2 x} = -\cos x$. De limiet is dus gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c. We weten $P = (p, \sqrt{1-\sin p})$, en $f'(p) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin p}$. De lijn door P loodrecht op de raaklijn heeft helling $-\frac{1}{f'(p)}$ en vergelijking $f'(p)y + x = f'(p)\cdot f(p) + p$; het snijpunt A met de x-as vinden we door $y = 0$ te nemen: $x = p + f'(p)\cdot f(p) = p - \frac{1}{2}\cos p$ (zie vorige onderdeel voor $f'(p)$). NB als $p = \frac{1}{2}\pi$ dan geldt $A = P$ en als $p = \frac{3}{2}\pi$ dan $f'(p) = 0$, dus $B = P$, conclusie: het gevraagde maximum treedt ergens in het open interval op. De driehoek heeft basis $-\frac{1}{2}\cos p$ (want $\cos p < 0$ op het interval) en hoogte $\sqrt{1-\sin p}$, en dus oppervlakte $-\frac{1}{4}\cos p\sqrt{1-\sin p}$. De afgeleid hiervan is gelijk aan

$$-\frac{1}{4}\cdot -\sin p\cdot\sqrt{1-\sin p} - \frac{1}{4}\cdot\cos p\cdot\frac{-\cos p}{2\sqrt{1-\sin p}} = \frac{1+2\sin p - 3\sin^2 p}{8\sqrt{1-\sin p}} = \frac{(1-\sin p)(1+3\sin p)}{8\sqrt{1-\sin p}}$$

Op het open interval geldt $1-\sin p > 0$, dus hebben we $\sin p = -\frac{1}{3}$ als enige oplossing, en alleen voor die waarde van p treedt tekenwisseling op van positief naar negatief, daar bevindt zich heft maximum. Als $\sin p = -\frac{1}{3}$ dan $\sqrt{1-\sin p} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ en $\cos p = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$. De maximale oppervlakte is dus gelijk aan $-\frac{1}{4}\cdot -\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$.

Opmerkingen: De eerste twee onderdelen zijn veel makkelijker dat het derde; dat derde onderdeel is niet flauw; er moet een paar stappen diep gedacht worden.

5 Zes vrienden gaan naar een zeer druk bezochte hondententoonstelling. Ieder komt op eigen gelegenheid. Elke bezoeker ontvangt bij zijn binnenkomst een enveloppe. Eén op de drie enveloppen bevat een cadeaubon.

a. Bereken de kans dat precies één van de twee vrienden een cadeaubon krijgen.

De vrienden spreken af dat zij bij aankomst in de koffiekamer van het tentoonstellingsgebouw op elkaar zullen wachten. Twee van de zes vrienden zullen elk hun hond meenemen naar de tentoonstelling. X is het aantal honden van de vrienden dat gearriveerd is op het moment dat er nog maar vier vrienden aanwezig zijn.

b. Geen de kansverdeling van X, aangenomen dat de volgorde waarin de vrienden aankomen willekeurig is.

Tijdens de koffiepuaze vragen de vrienden zich af hoe groot de fractie f is van het aantal bezoekers dat een hond naar de tentoonstelling heeft meegenomen. Zij beschouwen zichzelf voorlopig als representatief en veronderstellen f gelijk aan $\frac{1}{3}$. Zij nemen een aselecte steekproef van 20 bezoekers, en besluiten hun veronderstelling te verwerpen als er onder deze 20 bezoekers hoogstens 3 of minstens 11 een hond hebben meegenomen.

c. Bereken de kans dat zij hun veronderstelling ten onrechte zullen verwerpen.

Uitwerking:

a. Dit is een binomiale verdeling met succeskans $p = \frac{1}{3}$ en $n = 6$. De kans is dan gelijk aan $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$, en dat is gelijk aan $\frac{80}{243}$.

b. Er zijn $\binom{6}{4} = 15$ mogelijke groepen van vier vrienden. Er is één groep van vier zonder honden. Er zijn $2\times\binom{4}{3} = 8$ groepen met één hond: per hond vier groepen van drie uit de vrienden zonder hond. Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ groepen met twee honden (twee uit de vier zonder hond). Dus: $P(X=0) = \frac{1}{15}$, $P(X=1) = \frac{8}{15}$, en $P(X=2) = \frac{6}{15}$.

c. De aanname is dat het aantal honden H uit de steekproef binomiaal verdeeld is met $n = 20$ en $p = \frac{1}{3}$. Uit mijn tabellenboekje uit 1973: $P(H \leqslant 3) = 0{,}0604$ en $P(H \leqslant 10) = 0{,}9624$. Dan volgt $P(H \geqslant 11) = 0{,}0376$) en dus is de kans op ten hoogste 3 of ten minste 11 honden gelijk aan $0{,}0376 + 0{,}0604 = 0{,}0980$.

Opmerkingen: Niet al te moeilijk. Het tabellenboekje bewijst nog steeds goede diensten.