## EINDEXAMEN WISKUNDE 2, VWO, 1975

**1** In $\mathbb{R}_3$ zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $D(0,0,2)$. Deze punten zijn de hoekpunten van de kubus $OABC.DEFG$. Punt $K$ is het midden van ribbe $AO$. Punt $P$ is het snijpunt van de zijvlaksdiagonalen $BG$ en $CF$.

a. Bereken in graden nauwkeurig de hoek van lijn OP en het vlak CDK

Punt $F$ is het middelpunt van een bol $\beta$ met straal $\sqrt{2}$.

b. Stel een vectorvoorstelling op van elk van de lijnen door punt $E$ die de bol $\beta$ raken en evenwijdig zijn aan het vlak met vergelijking $3x_2 - 5x_3 = 0$.

c. Een punt $Q$ voldoet aan de volgende twee eisen:
1. $EQ = PQ$
2. de raaklijnen door $Q$ aan $\beta$ raken deze bol in punten die tot $Q$ een afstand hebben gelijk aan $OQ$.

Stel een vectorvoorstelling op van de verzameling van de punten $Q$.

**Uitwerking**:

a. De vector $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$ is gelijk aan $(1,2,1)^T$, en de vergelijking van $CDK$ is $2x + y + z = 2$ (vul maar in), met normaal $\boldsymbol{n} = (2,1,1)^T$. De gevraagde hoek is gelijk aan $90° - \angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n})$.
Beide vectoren $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{n}$ hebben lengte $\sqrt{6}$, en hun inwendig product is gelijk aan 5. Dus $\cos\angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}) = \frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots$. Tabellenboekje: $\angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n})$ ligt tussen $33°33'$ en $33°34'$. De gevraagde hoek ligt dus tussen $56°26'$ en $56°27'$. Afgerond op hele graden $56°$ dus.

b. De vergelijking van $\beta$ is $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2$.
De lijnen liggen in het vlak door $E$ parallel aan het gegeven vlak. Het vlak heeft richtingsvectoren $(1,0,0)^T$ en $(0,5,3)^T$ (beide loodrecht op $(0,3,-5)^T$). De lijn door $E$ met richtingsvector $(1,0,0)^T$ ligt op afstand 2 van $F$ en snijdt de bol dus niet. Elke andere lijn door $E$ in het vlak heeft een richtingsvector van de vorm $(a,5,3)^T$. We snijden $\beta$ en zo'n lijn: $(2,0,2)^T + \lambda(a,5,3)^T$. Dat geeft $(a\lambda)^2 + (5\lambda-2)^2 + (3\lambda)^2 = 2$, of $(a^2+34)\lambda^2 - 20\lambda + 2 = 0$. Die vergelijking mag maar één oplossing hebben, dus de discriminant, $20^2 - 4\cdot(a^2+34)\cdot 2$ moet gelijk aan 0 zijn, dus $8a^2 = 128$, of $a^2 = 16$. Dat geeft $a = 4$ en $a = -4$ als mogelijkheden. De lijnen zijn dus $\ell_1$: $\boldsymbol{x} = (2,0,2)^T + \lambda(4,5,3)$, en $\ell_2$: $\boldsymbol{x} = (2,0,2)^T + \lambda(-4,5,3)$

c. De eis $EQ = PQ$ vertaalt zich in $(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$. Na uitwerken en omwerken wordt dit $x - 2y + z = 2$.
Voor de tweede eis merken we op dat $QXF$ een rechthoekige driehoek is als $X$ op $\beta$ ligt en op een raaklijn door $Q$ aan $\beta$. Dus $QF^2 = QX^2 + XF^2$, en omdat $QX = OQ$ en $FX = \sqrt{2}$ staat hier $QF^2 = OQ^2 + 2$. Dat levert $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2$. Na uit- en omwerken krijgen we $2x + 2y + 2z = 5$.
Die twee vlakken snijden levert $y = \frac{1}{2}$ en $x + z = 2$. Dit levert de lijn $\ell$: $\boldsymbol{x} = (2, \frac{1}{2}, 0)^T + \lambda(-1,0,1)$.

**Opmerkingen**: Die vragen zijn niet kinderachtig. Overal moet men twee of drie stappen diep denken.

**2** In $\mathbb{R}_3$ is ten opzichte van een orthonormale basis voor elke $p \in \mathbb{R}$ de matrix van de afbeelding $A_p$ gegeven door:

$$\begin{pmatrix} p & -2 & 0 \\ 0 & p & -2 \\ -2 & 0 & p \end{pmatrix}$$

a. Voor welke $p$ is het $A_p$-beeld van $\mathbb{R}_3$ een vlak? Stel een vectorvoorstelling van dit vlak op.

b. $V$ is het vlak met vergelijking $x_1 - x_2 = 0$. Voor welke $p$ is het $A_p$-beeld van $V$ een vlak dat loodrecht op $V$ staat?

c. Voor elke $p \neq 2$ is er precies één lijn door $O(0,0,0)$ die onder $A_p$ op zichzelf afgebeeld wordt.
Bewijs dit.
Voor welke $p$ is deze lijn puntsgewijs invariant? (een lijn is puntsgewijs invariant wil zeggen: elk punt van de lijn valt met zijn beeldpunt samen).

**Uitwerking**:

a. De determinant van de matrix is gelijk aan $p^3 - 8$, die is alleen gelijk aan 0 als $p = 2$. Voor $p = 2$ ligt de derde kolom van $A_p$ in het vlak opgespannen door de eerste twee kolommen: $(0,-2,2)^T = -(2,0,-2)^T - (-2,2,0)^T$. Het $A_2$-beeld heeft dus de vectorvoorstelling $\boldsymbol{x} = \lambda(2,0,-2) + \mu(-2,2,0)^T$.

b. Het vlak $V$ wordt opgespannen door $(1,1,0)^T$ en $(0,0,1)^T$, en heeft $(1,-1,0)^T$ als normaalvector. Het $A_2$-beeld heeft $(1,1,1)^T$ als normaalvector en staat dus niet loodrecht op $V$. De $p$s die we zoeken zijn ongelijk aan 2.
Het beeld van $V$ wordt opgespannen door $(p-2,p,-2)^T$ en $(0,-2,p)^T$, hun uitwendig product is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} p-2 \\ p \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2-4 \\ -p^2+2p \\ -2p+4 \end{pmatrix} = (p-2)\begin{pmatrix} p+2 \\ -p \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hier zien we weer dat $p=2$ afvalt: dan is het uitwendig product de nulvector (en het beeld van $V$ is een lijn, geen vlak).
De vector $(p+2,-p,-2)^T$ moet loodrecht op $(1,-1,0)^T$ staan, dus moet het inwendig product van de twee vectoren, $p+2+p$, moet gelijk zijn aan 0. En dat levert $p=-1$.

c. De eigenwaarden van $A_p$ berekenen we via $\det(A_p-\lambda I)=0$ op te lossen. Dat wordt $(p-\lambda)^3-8=0$, met als enige oplossing $\lambda=p-2$. De bijbehorende eigenvectoren krijgen we door

$$\begin{aligned} 2x-2y \qquad &= 0 \\ 2y-2z &= 0 \\ -2x \qquad +2z &= 0 \end{aligned}$$

op te lossen, met oplossing $\boldsymbol{x}=(t,t,t)$. En $(1,1,1)^T$ is een eigenvector bij eigenwaarde $p-2$.
Om de lijn puntsgewijs invariant te krijgen moet die eigenwaarde gelijk aan 1 zijn, dus $p=3$.

**Opmerkingen**: Dat is volwassen Lineaire Algebra, zij het in slechts drie dimensies. Maar toch ...

**3** In $\mathbb{R}_3$ zijn ten opzichte van een orthonormale basis $V_1$, $V_2$, en $V_3$ vlakken met vergelijkingen:

$$\begin{aligned} V_1\colon\ 2ax_1+ax_2+(a+1)x_3 &= b \\ V_2\colon\ x_1+2x_2+ax_3 &= -1 \\ V_3\colon\ -x_1+x_2+ax_3 &= 14 \end{aligned}$$

waarbij $a\in\mathbb{R}$ en $b\in\mathbb{R}$.

a. Voor welke $a$ en $b$ bestaat de doorsnede van $V_1$, $V_2$, en $V_3$ uit meer dan één punt? Stel een vectorvoorstelling op van deze doorsnede.

b. Gegeven is $a=-1$ en $b=0$ De afbeelding $P$ is de loodrechte projectie van $\mathbb{R}_3$ op vlak $V_1$. Van een bol $\beta$ is het middelpunt $M(8,4,0)$. Het $P$-beeld van $\beta$ heeft met $V_3$ precies één punt gemeen Bereken de straal van $\beta$.

c. Gegeven is $a=1$ en $b=-5$. $S$ is het gemeenschappelijke punt van de vlakken $V_1$, $V_2$ en $V_3$. $A$ is een lineaire afbeelding waarbij de snijlijn van de vlakken $V_2$ en $V_3$ afgebeeld wordt op het punt $S$. Bewijs dat er een lijn is die voor elke $A$ tot de kern behoort. Stel een vectorvoorstelling van deze lijn op. Bewijs dat er een lijn is die bij elke $A$ puntsgewijs invariant is (een lijn is puntsgewijs invariant wil zeggen: elk punt van de lijn valt met zijn beeldpunt samen)

**Uitwerking**:

a. Na uitvoeren van rijoperaties op het resulterende stelsel komen we uit op

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+ax_3 &= -1 \\ 3x_2+2ax_3 &= 13 \\ (a+1)x_3 &= b+15a \end{aligned}$$

Voor meer dan één oplossing moet de onderste vergelijking een nulvergelijking zijn, dat geldt als $a=-1$ en $b=15$.

b. Als $a=-1$ en $b=0$ dan is $V_1$ gegeven door $2x_1+x_2=0$. De plaatsvector van $M$ staat loodrecht op $V_1$, dus de projectie van $M$ op $V_1$ is de oorsprong $O$.
De snijlijn $\ell$ van $V_1$ en $V_3$ heeft vectorvoorstelling $\boldsymbol{x}=(0,0,-14)^T+\lambda(1,-2,-3)^T$. Dat vind je door $x_2=-2x_1$ te nemen en dat in de vergelijking van $V_3$ in te vullen. Het beeld onder $P$ van de bol $\beta$ is een schijf met dezelfde straal als $\beta$ zelf. De snijlijn moet de rand van die schijf raken; de straal van $\beta$ is dus gelijk aan de afstand van $O$ tot $\ell$. Die vinden we door $\ell$ te snijden met het vlak door $O$ loodrecht op $\ell$, en dat is gegeven door $x_1-2x_2-3x_3=0$. Invullen en oplossen levert het snijpunt $(-3,6,-5)$. Dus de straal van $\beta$ is gelijk aan $\sqrt{9+36+25}=\sqrt{70}$.

c. Uit het driehoeksstelsel halen we snel dat $S=(-8,1,5)$ als $a=1$ en $b=-5$. Omdat de snijlijn van $V_2$ en $V_3$ op $S$ wordt afgebeeld worden de punten op de lijn door $O$ parallel aan die snijlijn op $O$ afgebeeld. De snijlijn $\ell_1$ van de vlakken door $O$ die parallel zijn aan $V_2$ en $V_3$ zit dus in de kern van $A$. Die snijlijn heeft $(1,-2,3)^T$ als richtingsvector, dus $\ell_1\colon\ \boldsymbol{x}=\lambda(1,-2,3)^T$.
Er geldt dat $A\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s}$ de plaatsvector van $S$), en dus $A(\lambda\boldsymbol{s})=\lambda\boldsymbol{s}$ voor alle $\lambda$. De lijn door $O$ en $S$ is dus puntsgewijs invariant.

**Opmerkingen**: Ook hier gaat niet alles vanzelf.