AM2520-H: Geschiedenis

week 3.6, Donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 19 maart, 2020

Wat zijn de reële getallen

Een van de eersten die zich realiseerde dat de reële getallen nooit degelijk (algebraïsch, aritmetisch) waren aangepakt was Richard Dedekind.

Er werd vooral meetkundig (lengte) en natuurkundig (tijd) naar de 'getallenlijn' gekeken.

Maar wat voor *getal* een verhouding of grootheid nu was was niet geheel duidelijk.

Dedekind: Stetigkeit und Irrationale Zahlen

In zijn eigen woorden:
"Es kam nur noch darauf an, seinen eigentlichen Ursprung in den Elementen der Arithmetik zu entdecken und hiermit zugleich eine wirkliche Definition von dem Wesen der Stetigkeit zu gewinnen"

Uitzoeken hoe het *rekenkundig* zit met de reële getallen en 'het wezen der continuïteit'.

Verhoudingen

Dedekind haalde zijn inspiratie bij Euclides.

Boek V, Definitie 5

Magnitudes are said to be *in the same ratio*, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever are taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.

Delft University of Technology

Verhoudingen

Dat hadden we vertaald in

$$a : b = c : d$$

als voor elk tweetal natuurlijke getallen m en n geldt

- als $m \cdot a < n \cdot b$ dan $m \cdot c < n \cdot d$, en
- als $m \cdot a = n \cdot b$ dan $m \cdot c = n \cdot d$, en
- als $m \cdot a > n \cdot b$ dan $m \cdot c > n \cdot d$

Verhoudingen

Dus, als $a : b \neq c : d$ dan zijn er m en n met

- $m \cdot a < n \cdot b$ en $m \cdot c \geqslant n \cdot d$ en dus $\frac{b}{a} > \frac{m}{n} \geqslant \frac{d}{c}$, of
- $m \cdot a = n \cdot b$ en $m \cdot c \neq n \cdot d$ en dus $\frac{b}{a} = \frac{m}{n} \neq \frac{d}{c}$, of
- $m \cdot a > n \cdot b$ en $m \cdot c \leqslant n \cdot d$ en dus $\frac{b}{a} < \frac{m}{n} \leqslant \frac{d}{c}$

Er zit dus een rationale verhoudig tussen $a : b$ en $c : d$.

Delft University of Technology

Continuïteit

Het *wezen der continuïteit* zat volgens Dedekind hierin.

> Zerfallen all Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweitenKlasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.

Continuïteit

Dat wil zeggen: neem aan dat de (getallen)lijn geschreven is als $A_1 \cup A_2$ en zó dat voor alle $a \in A_1$ en $b \in A_2$ geldt dat $a < b$.

Dan is er een punt p dat die verdeling teweeg brengt: er geldt $A_1 = \{a : a \leqslant p\}$ of $A_2 = \{b : p \leqslant b\}$.

Continuïteit

Dedekind verontschuldigde zich er bijna voor dat hij deze formulering had gekozen.
“Kan deze triviale opmerkingen inderdaad het geheim van de continuïteit bevatten?”

Maar hij verontschuldigde zich niet echt want: deze eigenschap, waarvan iedereen vindt dat de getallenlijn die heeft, is niet op enige arithmetische/algebraïsche wijze te bewijzen.

Deze eigenschap van de getallenlijn is niet anders dan een extra Axioma.

Waarom? Wel, . . . , de rationale getallen hebben dezelfde arithmetische basiseigenschappen als de getallenlijn maar . . .

Continuïteit

Voor de rationale getallen geldt dit niet: stel D is een natuurlijk getal maar geen kwadraat.

Dan is D ook niet het kwadraat van een rationaal getal.

Neem nu $A_1 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ of } q^2 < D\}$ en $A_2 = \mathbb{Q} \setminus A_1$.

Deze verzamelingen voldoet aan de eis dat $a < b$ als $a \in A_1$ en $b \in A_2$.
Maar er is geen p die deze splitsing teweeg brengt.

Continuïteit

Neem namelijk het natuurlijk getal λ met $\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$.

Neem aan dat er natuurlijke getallen t en u zijn met $t^2 - Du^2 = 0$, neem hierin u zo klein mogelijk.

Dan geldt $\lambda u < t < (\lambda+1)u$.

Dan is $v = t - \lambda u$ een natuurlijk getal en kleiner dan u.

Neem ook $s = Du - \lambda t$ is positief.

Reken nu na dat $s^2 - Dv^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$, tegenspraak.

TUDelft
Delft University of Technology

Continuïteit

Voor alle zekerheid: A_1 heeft geen maximum en A_2 geen minimum.

Stel $q \in \mathbb{Q}$. Dan geldt $q^2 < D$ of $q^2 > D$.

Schrijf

$$p = \frac{q(q^2 + 3D)}{3q^2 + D}$$

Opgave: reken na dat $p - q = \frac{2q(D-q^2)}{3q^2+D}$ en $p^2 - D = \frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}$.

Nu volgt: als q positief is en in A_1 dan $p \in A_1$ en $q < p$;
als $q \in A_2$ dan $p \in A_2$ en $p < q$.

TUDelft
Delft University of Technology

Sneden

Bekijk paren deelverzamelingen $\langle A_1, A_2 \rangle$ van $\mathbb{Q}$ met de volgende eigenschappen

- $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$
- als $p \in A_1$ en $q \in A_2$ dan $p < q$
- A_1 heeft geen maximum

Intuïtief: elk reëel getal x bepaalt zo'n paar: $A_{x,1} = \{p \in \mathbb{Q} : p < x\}$ en $A_{x,2} = \{q \in \mathbb{Q} : x \leqslant q\}$.

Zo'n paar noemen we een *snede*.

Sneden

Dedekind: die sneden *vormen* de reële getallen, bijvoorbeeld:

$\sqrt{3}$ *is* het paar $\langle A_1, A_2 \rangle$ met $A_1 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ of } q^2 < 3\}$ en $A_2 = \mathbb{Q} \setminus A_1$.

Elk rationaal getal q bepaald een eigen snede: $A_{q,1} = \{x : x < q\}$ en $A_{2,q} = \{x : x \geqslant q\}$.

Sneden ordenen

Als $\langle A_1, A_2\rangle$ en $\langle B_1, B_2\rangle$ sneden zijn dan zeggen we

$$\langle A_1, A_2\rangle \leqslant \langle B_1, B_2\rangle$$

als $A_1 \subseteq B_1$ (of $B_2 \subseteq A_2$).

Dit geeft de orde-volledigheid uit het eerste jaar.

Sneden ordenen

Stel $\mathbb{A}$ is een verzameling sneden en stel dat $\langle B_1, B_2\rangle$ is een bovengrens.

Definieer $C_1 = \bigcup\{A_1 : \langle A_1, A_2\rangle \in \mathbb{A}\}$ en $C_2 = \mathbb{Q} \setminus C_1$ (dat is $\bigcap\{A_2 : \langle A_1, A_2\rangle \in \mathbb{A}\}$).

Dan geldt $\langle C_1, C_2\rangle = \sup \mathbb{A}$.

Sneden optellen

Stel $\langle A_1, A_2\rangle$ en $\langle B_1, B_2\rangle$ zijn sneden.

Definieer C_1 als de verzameling van elementen c van $\mathbb{Q}$ waarvoor $a \in A_1$ en $b \in B_1$ bestaan met $c \leqslant a + b$, en $C_2 = \mathbb{Q} \setminus C_1$.

Per definitie geldt dan

$$\langle C_1, C_2\rangle = \langle A_1, A_2\rangle + \langle B_1, B_2\rangle$$

Deze optelling voldoet aan alle regels uit het eerste jaar.

Sneden vermenigvuldigen

Opgave: definieer ook vermenigvuldiging van sneden.

Je zult zien waarom Dedekind het achterwege liet in zijn artikel; hij verzekerde de lezer ervan dat het mogelijk was, maar nogal veel werk.

Fundamentaalrijen

Begin met de verzameling $\mathcal{C}$ van alle Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$.
Noem twee rijen $\langle p_n \rangle_n$ en $\langle q_n \rangle_n$ *equivalent* als

$$\lim_{n\to\infty} p_n - q_n = 0$$

Definieer $\mathbb{R}$ als de verzameling equivalentieklassen.

Fundamentaalrijen

De rekenkunde is hier makkelijker: definieer het coördinaatsgewijs voor de rijen en laat zien:

als $\langle a_n \rangle_n$ en $\langle b_n \rangle_n$ equivalent zijn en $\langle c_n \rangle_n$ en $\langle d_n \rangle_n$ ook dan geldt

$\langle a_n + c_n \rangle_n$ en $\langle b_n + d_n \rangle_n$ zijn equivalent

$\langle a_n \cdot c_n \rangle_n$ en $\langle b_n \cdot d_n \rangle_n$ zijn equivalent

Dus optelling en vermenigvuldiging van equivalentieklassen is goed gedefinieerd.

Vergelijking

Dedekind garandeert de orde-volledigheid van $\mathbb{R}$.

De anderen zorgen dat Cauchy-rijen convergeren.

We weten dat die twee eigenschappen equivalent zijn.